

# 2025 年度大学院博士前期課程入学試験

## 大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報通信工学専攻

### 専門科目試験問題 (電気工学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

#### 【注意事項】

1. 問題用紙は、この表紙を除いて21ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、①「制御工学」、②「電磁気工学」、③「量子電子物性1」、「量子電子物性2」、「量子電子物性3」、及び、④「信号処理」、の全部で4分野(①~④)6題あり、この順番に綴じられている。この4分野(①~④)6題のなかから2分野以上3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【制御工学】 解答は、白色の解答用紙に記入すること。

以下の問 1～問 5 に答えよ。

問 1 図 1 に示すブロック線図において、 $R(s)$  から  $Y(s)$  への伝達関数  $Y(s)/R(s)$  を、 $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $G_3(s)$ ,  $G_4(s)$ ,  $G_5(s)$  を用いて表せ。

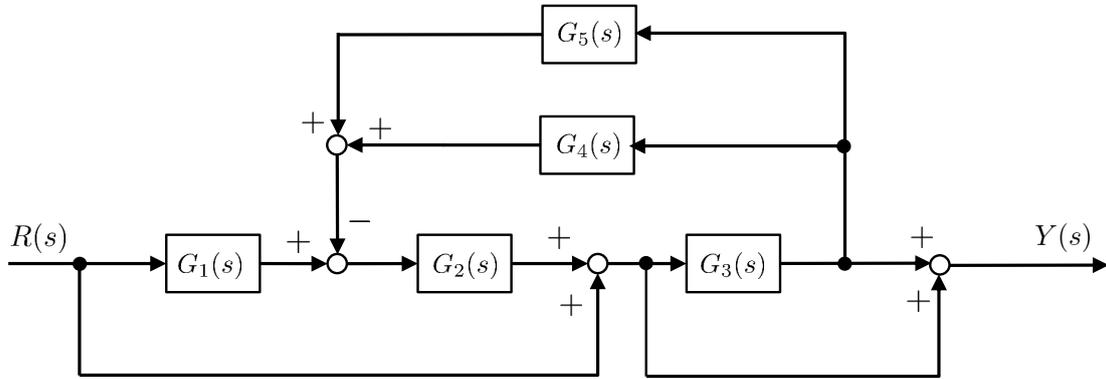


図 1

問 2 次の伝達関数  $G_a(s)$ ,  $G_b(s)$  で記述される線形時不変システムのステップ応答が、(A) ある値に収束する、(B) 発散する、(C) 持続振動する、のいずれになるかをその理由とともに、それぞれ答えよ。

$$G_a(s) = \frac{1}{s^4 + s^3 + s - 1}$$

$$G_b(s) = \frac{s^2 + 1}{s^5 + 3s^4 + 7s^3 + 19s^2 + 10s + 20}$$

問 3 次の伝達関数  $G(s)$  で表される線形時不変システムに対して、以下の問いに答えよ。

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

- (i) このシステムのインパルス応答を  $t$  の関数 ( $t \geq 0$ ) として求めよ。
- (ii) このシステムの周波数伝達関数  $G(j\omega)$  の偏角  $\angle G(j\omega)$  の極限值  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega)$  及び  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega)$  を求めよ。ただし、 $j$  は虚数単位を表し、 $\omega$  は角周波数を表す。
- (iii) 複素平面上において、このシステムの伝達関数  $G(s)$  のベクトル軌跡が実軸上の負の部分と交わるときの角周波数およびそのときの交点の座標を求めよ。
- (iv) このシステムに対して、入力として  $\sin\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}t\right)$  ( $t \geq 0$ ) という正弦波関数を加えたとき、定常状態における出力も  $X \sin\left(\frac{2\sqrt{14}}{7}t + \phi\right)$  となる正弦波関数となった。  $X$  と  $\phi$  の値をそれぞれ求めよ。

問4 次の状態方程式と出力方程式で表現される線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ 、 $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ であり、 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は状態、 $u(t)$ は入力、 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ は出力を表し、 $t \geq 0$ とする。

- (i) このシステムの可制御性行列を求め、可制御性を判定せよ。ただし、その判定理由も述べること。
- (ii) このシステムの可観測性行列を求め、可観測性を判定せよ。ただし、その判定理由も述べること。

問5 次の状態方程式で表現される線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ であり、 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は状態、 $u(t)$ は入力を表し、 $t \geq 0$ とする。

- (i) 入力 $u(t)$ を $u(t) = e^{-2t}$ としたときの状態 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ をそれぞれ、 $t$ の関数として求めよ。ただし、時刻 $t = 0$ での初期状態を $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする。
- (ii)  $k$ を任意の実数値をとるパラメータとする。

$$u(t) = - \begin{bmatrix} k & k \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

なる状態フィードバック制御を施したフィードバックシステムが漸近安定となるための、 $k$ に関する必要十分条件を示せ。

- (iii)  $k_1$ と $k_2$ を任意の実数値をとるパラメータとする。

$$u(t) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

なる状態フィードバック制御を施したフィードバックシステムの極が互いに共役な複素数 $-1 + j2$ と $-1 - j2$ になるような、 $k_1$ の値と $k_2$ の値を求めよ。

## 専門用語の英訳

ブロック線図	block diagram
伝達関数	transfer function
線形時不変システム	linear time-invariant system
ステップ応答	step response
収束する	converge
発散する	diverge
持続振動する	oscillate persistently
インパルス応答	impulse response
周波数伝達関数	frequency transfer function
偏角	argument
角周波数	angular frequency
ベクトル軌跡	vector locus
定常状態	steady state
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
可制御性行列	controllability matrix
可観測性行列	observability matrix
状態フィードバック制御	state feedback control
漸近安定	asymptotically stable
必要十分条件	necessary and sufficient condition
極	pole

【電磁気工学】 解答は、黄色の解答用紙に記入すること。

問1～問3について答えよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。また、文中では列ベクトルも行ベクトルの形で表示する。

問1 外部電界が0で、外部磁界 $\mathbf{B}_{\text{ext}} = (0, 0, B_0)$ の空間を移動する電子について考える。電子は電荷 $-e$ を持つ。 $e$ は素電荷である。時刻 $t = 0$ において、電子速度 $\mathbf{u}_{t=0} = (u_{\perp}, 0, u_{\parallel})$ と電子の位置 $\mathbf{r}_{t=0} = (0, 0, 0)$ が与えられたとき、 $t > 0$ での $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  および $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ を示せ。また、 $x - y$ 平面上での電子の運動の軌跡及び磁界の向きを図示せよ。図に電子の運動の方向を示す矢印を加え、運動の大きさが分かるように切片の座標を示せ。ただし、 $B_0, u_{\perp}$ はどちらも0より大きい実数の定数とする。

問2 (ア)～(キ)に適切な文字式を答えよ。

外部電界が0で、外部磁界 $\mathbf{B}_{\text{ext}} = (0, 0, B_0)$ と平行方向に伝搬するプラズマ中の電磁波について考える。 $B_0$ は0より大きい実数の定数であり、電磁波は $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ と同じ向きに伝搬する。電子の運動量保存則から、

$$m_e n_e \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p - n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}) + \mathbf{F}_c \quad (1)$$

が与えられる。ただし、 $m_e$ は電子質量、 $n_e$ は電子密度、 $e$ は素電荷、 $\mathbf{u}$ は電子速度、 $p$ は圧力、 $\mathbf{F}_c$ は衝突に関する量である。電磁波の磁界は外部磁界に比べて小さく、電磁波の磁界による電子の運動への効果は無視できるとする。

このようなプラズマ中の波動現象について考えるとき、ある物理量 $\mathbf{A}$ を、平衡状態を示す0次の項と1次の摂動項の和に分け、摂動量を $\mathbf{A}_1 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ と仮定すると便利である。ここで、波数ベクトル $\mathbf{k}$ 、位置ベクトル $\mathbf{r}$ 、角周波数 $\omega$ を用いた。 $\omega > 0$ とする。 $\mathbf{A}_1$ は振幅と位相差を表す複素数である。1次より高次の摂動項は無視する。例えば、電磁波の電界の摂動量 $\mathbf{E}_1 = (E_{1x}, E_{1y}, 0)$ は、 $\mathbf{E}_1 \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ となる。 $E_{1x} > 0$ および $E_{1y} > 0$ とする。

圧力勾配項及び衝突項の効果は無視し、摂動量についての仮説を用いて式(1)を線形化すると、

$$-i\omega m_e \mathbf{u}_1 = -e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_{\text{ext}}) \quad (2)$$

が得られる。電子サイクロトロン周波数 $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ を用いて、 $\mathbf{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$ について解くと、

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{m_e \omega} (\mathcal{A} E_{1x} - \mathcal{I} E_{1y}) (1 - \mathcal{U})^{-1} \\ \frac{e}{m_e \omega} (\mathcal{I} E_{1x} + \mathcal{A} E_{1y}) (1 - \mathcal{U})^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。

Maxwell の方程式から,

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (4)$$

が得られる. ただし,  $\mu_0$  は真空の透磁率,  $\epsilon_0$  は真空の誘電率,  $\mathbf{J}$  は電流密度である. また真空中の光速を  $c$  とする. 式 (4) を線形化し,  $\mu_0 \epsilon_0 = c^{-2}$  を用いると,

$$-\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) + k^2 \mathbf{E}_1 = i\omega \mu_0 \mathbf{J}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_1 \quad (5)$$

となる. 電界の周波数が十分高く, イオンの運動を無視すると, 電子速度  $\mathbf{u}_1$  を用いて電流密度  $\mathbf{J}_1 = -en_e \mathbf{u}_1$  が得られる.  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_1$  及び式 (3) を用いると, 式 (5) から

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - c^2 k^2 - \omega_p^2 (1 - \boxed{\text{ウ}})^{-1} & i\omega_p^2 (1 - \boxed{\text{ウ}})^{-1} \boxed{\text{エ}} \\ -i\omega_p^2 (1 - \boxed{\text{ウ}})^{-1} \boxed{\text{エ}} & \omega^2 - c^2 k^2 - \omega_p^2 (1 - \boxed{\text{ウ}})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

となる. ここで,  $\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}$  はプラズマ周波数である.

式 (6) が自明でない解をもつためには, 係数行列の行列式が 0 でなければならないので,

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \omega_p^2 (1 - \boxed{\text{ウ}})^{-1} = \pm \omega_p^2 (1 - \boxed{\text{ウ}})^{-1} \boxed{\text{エ}} \quad (7)$$

が成り立つ. これを変形すると,

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \frac{\omega_p^2}{\boxed{\text{オ}}} \quad (8)$$

が得られる.

さらに屈折率  $\tilde{n}$  について,  $\tilde{n}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}$  を得るように式変形すると,

$$\tilde{n}^2 = \begin{cases} 1 - \omega_p^2 \boxed{\text{カ}} \\ 1 - \omega_p^2 \boxed{\text{キ}} \end{cases} \quad (9)$$

$$(10)$$

となる. 式 (9) では  $\omega = \omega_c$  のとき分母が 0 となり共鳴が発生することがわかる. このとき式 (9) が示す波を R 波, 式 (10) が示す波を L 波とよぶ.

問 3 磁界がないプラズマでは, 周波数  $\omega$  が  $\omega < \omega_p$  の電磁波は反射される. よって電磁波で加熱されるプラズマの密度は,  $n'_e = \frac{\epsilon_0 m_e}{e^2} \omega^2$  が上限となる. しかし, 問 2 のように外部磁界が印加されている場合は,  $n_e > n'_e$  のプラズマに対しても電磁波によるプラズマの加熱が可能になる. 特に  $\omega \cong \omega_c$  の R 波は電子サイクロトロン波とよばれ, 無衝突でも加熱が起こるので, 低ガス圧でも高密度プラズマの生成が可能である.  $\omega \cong \omega_c$  の R 波による加熱について,  $\omega \rightarrow \omega_c$  における位相速度  $v_\phi = \omega/k$  の変化と電子の振る舞いを含めて説明せよ.

## 専門用語の英訳

電界	electric field
磁界	magnetic field
素電荷	elementary charge
電磁波	electromagnetic wave
運動量保存則	conservation of momentum
平衡状態	equilibrium state
摂動	perturbation
縦波	longitudinal wave
線形化	linearization
サイクロトロン周波数	cyclotron frequency
プラズマ周波数	plasma frequency
真空の透磁率	vacuum magnetic permeability
真空の誘電率	vacuum permittivity
行列式	determinant
位相速度	phase velocity

**【量子電子物性1】 解答は、桃色の解答用紙に記入すること。**

次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、プランク定数を $h$ 、 $h$ を $2\pi$ で割った値を $\hbar$ 、虚数単位を $i$ とする。

図 1-1 のような一次元階段型ポテンシャル $V(x)$ 中を、 $x$ が負の領域から正の領域へ進んでくるエネルギー $\varepsilon$ 、質量 $m$ の粒子について考える。ここで、

$$\begin{cases} V(x) = 0 & (x < 0) \cdots \text{領域 (I)} \\ V(x) = V_0 & (x \geq 0) \cdots \text{領域 (II)} \end{cases}$$

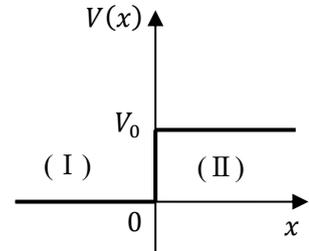


図 1-1

である。ただし $V_0$ は正とする。

まず、 $\varepsilon > V_0$ の場合を考える。領域(I)では、粒子の満たす一次元のシュレーディンガー方程式は、波動関数 $\psi_I(x)$ 、 $\varepsilon$ 、 $m$ を用いて、次式で与えられる。

$$[ \quad \text{①} \quad ] \tag{1}$$

この方程式の解はポテンシャル障壁で反射が生じることを考慮すると、 $k (= \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar)$ と複素振幅 $A$ 、 $B$ を用いて、次式で表される。

$$\psi_I(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \tag{2}$$

一方、領域(II)における波動関数を $\psi_{II}(x)$ とおくと、粒子の満たすシュレーディンガー方程式は、次式で与えられる。

$$[ \quad \text{②} \quad ] \tag{3}$$

式(3)の解は、 $\alpha (= \sqrt{2m(\varepsilon - V_0)}/\hbar)$ と複素振幅 $C$ を用いて、次式で表される。

$$\psi_{II}(x) = C \exp(i\alpha x) \tag{4}$$

$x = 0$ では、波動関数とその導関数がともに連続であることから、 $A$ に対する $B$ および $C$ の比は、 $k$ と $\alpha$ を使って、それぞれ、以下のように求まる。

$$\frac{B}{A} = [ \quad \text{③} \quad ], \quad \frac{C}{A} = [ \quad \text{④} \quad ] \tag{5}$$

一般に、波動関数 $\phi(x)$ における確率の流れの密度 $S(\phi)$ は、次式で与えられる。

$$S(\phi) = \frac{\hbar}{2mi} \left( \phi^*(x) \frac{d\phi(x)}{dx} - \phi(x) \frac{d\phi^*(x)}{dx} \right) \tag{6}$$

ここで、 $\phi^*(x)$ は $\phi(x)$ の複素共役とする。これから、入射波、反射波、透過波の波動関数に対してそれぞれの確率の流れの密度 $S_{Iw}$ ,  $S_{Rw}$ ,  $S_{Tw}$ は、 $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $k$ ,  $\alpha$ などを使って、次式で表される。

$$S_{Iw} = [ \quad \textcircled{5} \quad ], S_{Rw} = - [ \quad \textcircled{6} \quad ], S_{Tw} = [ \quad \textcircled{7} \quad ] \quad (7)$$

よって、 $x = 0$ の境界における入射粒子の反射率 $R_1$ および透過率 $T_1$ は、それぞれ入射波に対する反射波および透過波の確率の流れの密度の絶対値の比で与えられるので、 $k$ ,  $\alpha$ のみを使って以下のように求まる。

$$R_1 = [ \quad \textcircled{8} \quad ], T_1 = [ \quad \textcircled{9} \quad ] \quad (8)$$

次に、 $\varepsilon < V_0$ の場合を考える。領域(I)における波動関数 $\varphi_I(x)$ は、式(2)と同じ関数形であり、複素振幅 $A'$ ,  $B'$ を用いて、次式で表される。

$$\varphi_I(x) = A' \exp(ikx) + B' \exp(-ikx) \quad (9)$$

一方、領域(II)における波動関数 $\varphi_{II}(x)$ は、 $\beta = [ \quad \textcircled{10} \quad ]$ と複素振幅 $C'$ を用いて、次式で表される。

$$\varphi_{II}(x) = C' \exp(-\beta x) \quad (10)$$

よって、 $x = 0$ での境界条件から、 $A'$ に対する $B'$ および $C'$ の比は、 $k$ ,  $\beta$ を使って、それぞれ以下のように求まる。

$$\frac{B'}{A'} = [ \quad \textcircled{11} \quad ] \quad (11)$$

$$\frac{C'}{A'} = [ \quad \textcircled{12} \quad ] \quad (12)$$

また、反射率 $R_1$ および透過率 $T_1$ を得たときと同様の計算を行うと、 $x = 0$ の境界における入射粒子の反射率 $R_2$ および透過率 $T_2$ は次のように求まる。

$$R_2 = [ \quad \textcircled{13} \quad ], T_2 = [ \quad \textcircled{14} \quad ] \quad (13)$$

問1 文章中の空欄 [  $\textcircled{1}$  ] ~ [  $\textcircled{14}$  ] にあてはまる数式または数値を答えよ。なお、空欄 [  $\textcircled{1}$  ], [  $\textcircled{2}$  ] は等式、空欄 [  $\textcircled{13}$  ], [  $\textcircled{14}$  ] は数値で答えよ。

問2  $\varepsilon < V_0$ における領域(I)の粒子の確率密度 $|\varphi_I(x)|^2$ の空間分布について考察する。波動関数 $\varphi_I(x)$ において、 $A'$ ,  $B'$ は複素数であるので、それらの位相を $\eta_{A'}$ ,  $\eta_{B'}$ とおくと、 $A' = |A'| \exp(i\eta_{A'})$ ,  $B' = |B'| \exp(i\eta_{B'})$ と書ける。位相差を $\eta_{A'} - \eta_{B'} = 2\delta$ と定義すると、 $|\varphi_I(x)|^2$ は次式で与えられる。

$$|\varphi_I(x)|^2 = \{|A'| - |B'|\}^2 + 4|A'||B'| \cos^2(kx + \delta) \quad (14)$$

このとき以下の問いに答えよ.

- 1) 確率密度の空間分布の物理的意味について述べよ.
- 2) 式(11)の関係を利用して,  $|\varphi_I(x)|^2$ を $A'$ ,  $k$ ,  $\delta$ ,  $x$ を使って求めよ.

問3  $\varepsilon < V_0$ における領域(II)の粒子の確率密度 $|\varphi_{II}(x)|^2$ に関する以下の問いに答えよ.

- 1) 式(12)の関係を利用して,  $|\varphi_{II}(x)|^2$ を $A'$ ,  $\varepsilon$ ,  $V_0$ ,  $\beta$ ,  $x$ を使って求めよ.
- 2) 確率の流れの密度 $S(\varphi_{II})$ , および1)で得られた確率密度 $|\varphi_{II}(x)|^2$ を考慮すると,  $x \geq 0$ の領域で粒子の振る舞いや位置を観測できた場合, どのような結果が予想されるかを説明せよ.

問4 問2 および問3 で得られた結果を利用して,  $\cos^2(\delta)$ を $\varepsilon$ ,  $V_0$ を使って求めよ.

## 量子電子物性1 単語の英訳

プランク定数 :	Planck constant
シュレーディンガー方程式 :	Schrödinger equation
波動関数 :	wavefunction
複素振幅 :	complex amplitude
導関数 :	derivative
連続である :	be continuous
比 :	ratio
確率の流れの密度 :	probability current density
複素共役 :	complex conjugate
入射波 :	incident wave
反射波 :	reflected wave
透過波 :	transmitted wave
反射率 :	reflectance
透過率 :	transmittance
確率密度 :	probability density
空間分布 :	spatial distribution
位相 :	phase

**【量子電子物性2】 解答は、緑色の解答用紙に記入すること。**

半導体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、素電荷を $e$ 、電子の静止質量を $m$ 、ボルツマン定数を $k_B$ 、絶対温度を $T$ 、プランク定数を $h$ 、 $h$ を $2\pi$ で割った値を $\hbar$ 、虚数単位を $i$ とする。

周期表第 14 族 (IV族) に属するシリコンやゲルマニウムは結晶構造として [ ㉞ ] 型構造を形成する。この構造は [ ㉟ (単純立方・体心立方・面心立方) ] 格子に分類される。これらは純度が高く低温の場合には絶縁性を示すが、温度の上昇とともに電子が価電子帯から伝導帯へと励起され電気伝導に寄与し導電性を示す。このとき、価電子帯には電子が空の状態が形成され、これを正孔 (ホール) とよび、伝導電子も含めた電気伝導の担い手を [ ㊱ ] とよぶ。このような伝導電子と正孔が同数存在する半導体を [ ㊲ ] 半導体とよぶ。

以下では半導体のバンドギャップについて、格子定数が  $a$  の一次元モデルで考えてみよう。バンドギャップは一般的にブリルアンゾーンの境界に形成され、第一ブリルアンゾーンの境界の波数は  $\pm$  [ ㉑ ] である。周期的境界条件の下での自由電子の波動関数は波数を $k$ 、座標を $x$ として進行波の形である $\exp([ ㉒ ])$ と書ける。波数が $\pm$  [ ㉑ ] の場合、電子は [ ㊴ ] 反射を受け、それぞれ逆向きの進行波が共存しているため、波動関数は以下の2式で表される。

$$\psi(+)=\sqrt{\frac{1}{2a}}\exp([ ㉓ ])+\sqrt{\frac{1}{2a}}\exp([ ㉔ ])=\sqrt{\frac{2}{a}}\cos([ ㉕ ])\quad (1)$$

$$\psi(-)=\sqrt{\frac{1}{2a}}\exp([ ㉓ ])-\sqrt{\frac{1}{2a}}\exp([ ㉔ ])=i\sqrt{\frac{2}{a}}\sin([ ㉕ ])\quad (2)$$

波動関数から求められる確率密度は、進行波 $\exp([ ㉒ ])$ においては座標 $x$ によらず一定値となるが、定在波となる上記2つの波動関数においては座標 $x$ に依存して変化する。正に帯電したイオン核が $x=0$ に存在する場合、 $\psi(+)$ ではイオン核付近に電子が高密度で分布するため、進行波に比べて電子のポテンシャルエネルギーが [ ㊵ (高い・等しい・低い) ]。一方、 $\psi(-)$ では進行波に比べて電子のポテンシャルエネルギーが [ ㊶ (高い・等しい・低い) ]。これにより、ゾーン境界の電子のエネルギーは分裂し、バンドギャップを形成する。

次に、伝導帯の伝導電子密度 $n$ と価電子帯の正孔密度 $p$ について考える。伝導帯の底のエネルギーを $\varepsilon_C$ 、価電子帯の頂上のエネルギーを $\varepsilon_V$ 、フェルミ・ディラック分布関数を $f(\varepsilon)$ 、伝導帯と価電子帯の状態密度を $D_C(\varepsilon)$ 、 $D_V(\varepsilon)$ とおくと、伝導電子密度と正孔密度はこれらを使ったエネルギー積分の形で表すことができ、それぞれ

$$n=\int_{\varepsilon_C}^{\infty}D_C(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon\quad (3)$$

$$p=\int_{-\infty}^{\varepsilon_V}D_V(\varepsilon)(1-f(\varepsilon))d\varepsilon\quad (4)$$

となる。フェルミエネルギー $\varepsilon_F$ がバンドギャップ中にあり、 $\varepsilon_C$ 、 $\varepsilon_V$ から十分に離れている場合、 $f(\varepsilon)$ はマクスウェル・ボルツマン分布関数として近似できる。このとき、式(3)と式(4)はそれぞれ伝導帯の底、価電子帯の頂上における $\varepsilon_F$ を基準としたボルツマン因子を含んだ式として表すことができ、

$$n = N_C \times [ \quad \textcircled{6} \quad ] \quad (5)$$

$$p = N_V \times [ \quad \textcircled{7} \quad ] \quad (6)$$

となる。ここで、 $N_C$ 、 $N_V$ はそれぞれ伝導帯、価電子帯の有効状態密度である。上式において、正確には $\varepsilon_F$ ではなく化学ポテンシャルを用いるべきであるが、室温程度の環境では $\varepsilon_F$ と化学ポテンシャルは等しいものとした。

一方、半導体に不純物を添加すると、導電率が上がる。第14族結晶への添加の場合には、[  $\textcircled{8}$  (Sn・As・B) ]を添加することで伝導電子、[  $\textcircled{9}$  (Sn・As・B) ]を添加することで正孔が供給される。このような不純物のことをそれぞれドナー、アクセプタと呼ぶ。ここで水素原子モデルを参考にして、ドナー不純物のイオン化について考えてみよう。ラザフォードの水素原子モデルによれば、電子の全エネルギー $\varepsilon$ は運動エネルギーとイオン核から受けるポテンシャルエネルギーの総和として以下の式で表される。

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7)$$

ここで、電子の速さを $v$ 、軌道半径を $r$ 、真空の誘電率を $\epsilon_0$ とした。さらに、電子がイオン核から受ける力と軌道運動による遠心力が釣り合うことから、 $v$ を消去して

$$\varepsilon = [ \quad \textcircled{8} \quad ] \quad (8)$$

と表される。ボーアによれば、電子の角運動量は $N\hbar$  ( $N$ は自然数) となることから、 $r$ を消去すると、上式の取りうる最低エネルギーは、

$$\varepsilon = [ \quad \textcircled{9} \quad ] \quad (9)$$

と表される。このエネルギーは電子がイオン核の束縛から解放される真空準位を基準としたときのエネルギーであるが、ドナーに束縛された電子の場合には、自由電子の有効質量を $m_e$ 、半導体の比誘電率を $\kappa$ として $m \rightarrow m_e$ 、 $\epsilon_0 \rightarrow \kappa\epsilon_0$ と置き換えることで、伝導帯の底を基準としたドナー準位のエネルギー $\varepsilon_d$ とみなすことができる。ゲルマニウム結晶では、 $\varepsilon_d = -13.3 \text{ meV}$ と計算され、室温においてほぼ全てのドナーの電子が伝導帯に励起されていることがわかる。このような状態の温度領域のことを [  $\textcircled{10}$  ] 領域とよぶ。

- 問1 文章中の空欄 [ ㉞ ] ~ [ ㉟ ] に適切な語句を入れよ. 空欄 [ ㊱ ] および空欄 [ ㊲ ] ~ [ ㊳ ] については, 文章中の選択肢の中から適切なものを選ぶこと.
- 問2 文章中の空欄 [ ㊴ ] ~ [ ㊵ ] に適切な数式を入れよ.
- 問3 イオン核が作るポテンシャルを  $-2U_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$  ( $U_0 > 0$ ) としたとき, 式(1), (2)をもとに, バンドギャップエネルギーを導出せよ.
- 問4 式(5), (6)をもとにして, 不純物が添加されていないある半導体結晶の  $T = 300 \text{ K}$  におけるフェルミエネルギーの値を価電子帯の頂上を基準として単位をつけて有効数字2桁まで求めよ. なお, この温度におけるこの結晶のバンドギャップエネルギーを  $1.07 \text{ eV}$ ,  $N_C = 2.24 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$ ,  $N_V = 6.72 \times 10^{24} \text{ m}^{-3}$  とし,  $k_B = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eVK}^{-1}$  とする. 必要であれば,  $\exp(3) \approx 20$ ,  $\ln(3) \approx 1.1$  を用いよ.
- 問5 水素原子における基底状態のエネルギー準位は  $-13.6 \text{ eV}$  である. 式(9)をもとに, ある結晶において, 伝導帯の底を基準としたドナー準位のエネルギーを有効数字2桁まで求めよ. なお, この結晶での  $\kappa = 11.7$ ,  $m_e = 0.20m$  とする.

## 量子電子物性2 単語の英訳

半導体 :	semiconductor
素電荷 :	elementary charge
静止質量 :	rest mass
ボルツマン定数 :	Boltzmann constant
絶対温度 :	absolute temperature
プランク定数 :	Planck constant
虚数 :	imaginary number
周期表 :	periodic table of the elements
単純立方格子 :	simple cubic lattice
体心立方格子 :	body centered lattice
面心立方格子 :	face centered lattice
価電子帯 :	valence band
伝導帯 :	conduction band
正孔 :	hole
バンドギャップ :	bandgap
一次元モデル :	one dimensional model
ブリルアンゾーン :	Brillouin zone
周期的境界条件 :	periodic boundary condition
自由電子 :	free electron
波動関数 :	wavefunction
波数 :	wavenumber
進行波 :	traveling wave
確率密度 :	probability density
定在波 :	standing wave
イオン核 :	ion nucleus
ポテンシャルエネルギー :	potential energy
ゾーン境界 :	zone boundary
フェルミ・ディラック分布関数 :	Fermi-Dirac distribution function
状態密度 :	density of states
エネルギー積分 :	energy integral

フェルミエネルギー :	Fermi energy
マクスウェル・ボルツマン分布関数 :	Maxwell-Boltzmann distribution function
ボルツマン因子 :	Boltzmann factor
有効状態密度 :	effective density of states
化学ポテンシャル :	chemical potential
不純物 :	impurity
導電率 :	conductivity
ドナー :	donor
アクセプタ :	acceptor
ラザフォードの水素原子模型 :	Rutherford's hydrogen atom model
運動エネルギー :	kinetic energy
軌道運動 :	orbital motion
遠心力 :	centrifugal force
ボーア :	Bohr
角運動量 :	angular momentum
自然数 :	natural number
真空準位 :	vacuum level
有効質量 :	effective mass
比誘電率 :	relative dielectric constant

**【量子電子物性3】 解答は、灰色の解答用紙に記入すること。**

磁性体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、 $\mu_0$  は真空の透磁率、 $e$  は素電荷、記号  $\times$  はスカラー積またはベクトル積を表し、記号  $\langle \rangle$  は相加平均を表すものとする。

磁性体とは外部から磁界  $\mathbf{H}$  を印加した際に磁化  $\mathbf{M}$  が生じる媒質である。以下では、磁束密度  $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{H}$  および  $\mathbf{M}$  には次の関係が成り立つものとする。

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \quad (1)$$

式(1)の記号  $\mu_r$ ,  $\chi_m$  はそれぞれ [ ㉞ ] および [ ㉟ ] と呼ばれ、媒質の外部磁界に対する応答の大きさを表す。また、SI 単位系で  $\mathbf{B}$  の単位は [ ㊸ ]、 $\mathbf{H}$  の単位は [ ㊹ ]、そして  $\mu_0$  の単位は [ ㊺ ] となる。

2019 年 5 月 20 日の SI 単位系の再定義に伴い、 $\mu_0$  の値は大きく影響を受けた。これは、アンペア (A) の定義が見直されたことによる。従来の定義では、1 A は無限に小さい円形断面積をもつ、無限に長い 2 本の直線状導体を真空中に 1 m の間隔で平行においたとき、単位長さあたりの導体部分が  $2 \times 10^{-7}$  N の力を及ぼしあう場合、導体のそれぞれに流れる電流の大きさと定義されていた。アンペアの法則から、真空中で間隔  $r$  だけ離して設置された、無限に小さい円形断面積をもつ、無限に長い 2 本の直線状導体に電流  $I_m$  が平行に流れている場合、その間に働く単位長さあたりの力の大きさ  $F_m$  は、次の式で与えられる。

$$F_m = [ \quad \text{㉑} \quad ] \quad (2)$$

上式から、 $\mu_0$  の値は [ ㉒ ] という不確定性のない定数として与えられていた。ただし単位は [ ㊻ ] である。SI 単位系の再定義以降、基本単位の導出に基礎物理定数を使用することとなり、素電荷から求められる電荷量 1 C が 1 秒間流れたときの電流量が 1 A として再定義された。この結果、 $\mu_0$  は実験的に求められる定数となり、現在は測定誤差を含む値として知られている。

物質の磁氣的性質は  $\chi_m$  の大きさや磁気モーメントの振舞いによって反磁性、常磁性、強磁性、フェリ磁性、および反強磁性に分けられる。反磁性は全ての物質に見られ、その性質は古典論に基づく以下のモデルでも説明できる。図 3-1 に示すように、原子核の中心位置を原点  $O$  とす

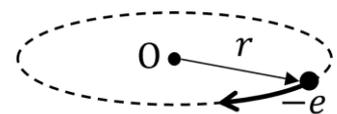


図 3-1

る座標系において、質量  $m$ 、電荷  $-e$  をもつ単一電子が原子核の中心から距離  $r$  の位置において角速度  $\omega$  で図に示す方向に周回運動しているとする。この運動によって流れる電流の大きさは [ ㉓ ] となり、アンペアの法則から、この環状電流の誘起する磁気モーメント  $\boldsymbol{\mu}$  は、環状電流の作る面に垂直、かつ流れる方向に対して右ねじの関係にある単位ベクトルを  $\mathbf{n}$  として、 $\boldsymbol{\mu} = [ \quad \text{㉔} \quad ] \times \mathbf{n}$  と与えられる。一方、電子の角運動量  $\mathbf{l}$  は運動の軌跡の作る面に垂直、かつ周回方向に対して右ねじの関係にある単位ベクトルを  $\mathbf{m}$  として  $\mathbf{l} = [ \quad \text{㉕} \quad ] \times \mathbf{m}$  と定義される。このことから、磁気モーメントと軌道角運動量には  $\boldsymbol{\mu} = [ \quad \text{㉖} \quad ] \times \mathbf{l}$  の関係がある。

原子核の周りを回転する単一電子に磁界を印加すると、電子は磁界が無い場合の運動に加え [ ㉗ ] 周波数 $\omega_L$ をもって歳差運動を行う。印加されている磁界の磁束密度の大きさを $B$ とすると、 $\omega_L$ は次式によって与えられる。

$$\omega_L = [ \quad \text{㉗} \quad ] \quad (3)$$

ここで、 $Z$ 個の電子が上記の歳差運動を行うと考えると、歳差運動の寄与による電流の大きさ $I$ は、次式によって与えられる。

$$I = [ \quad \text{㉘} \quad ] \quad (4)$$

この電流に伴う磁気モーメントは磁界と反対の方向に生じるため、反磁性的な寄与をもつ。

次に、三次元の直交座標系の $z$ 軸方向に磁界を印加した場合を考える。磁界に垂直な面内における電子の平均的な周回半径 $\langle\rho\rangle$ は $\langle\rho^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle$ の関係を満たすため、電子の歳差運動が生じさせる磁気モーメントの大きさ $\mu_m$ は次式で与えられる。

$$\mu_m = - [ \quad \text{㉙} \quad ] \times \langle\rho^2\rangle \quad (5)$$

三次元空間では、電子の原子核からの平均二乗距離は $\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle + \langle z^2\rangle$ によって与えられる。単位体積あたりの原子の数を $N$ としたときに $\chi_m = \mu_0 N \mu_m / B$ の関係が成り立つとし、電子の分布が球対称である場合に $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle$ となることを利用すると、 $\chi_m$ と $\langle r^2\rangle$ に関して次の関係が導かれる。

$$\chi_m = - [ \quad \text{㉚} \quad ] \times \langle r^2\rangle \quad (6)$$

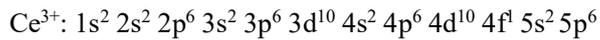
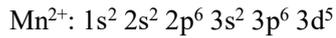
以上の議論より、 $\chi_m$ はイオン半径が [ ㉛ (大きい・小さい) ] 原子ほど大きい値をとる。

反磁性は、外部磁界の中で磁束を変化させようとする外部磁界の変化を妨げるように誘導電流が流れるという、電磁気学における [ ㉜ ] の法則に関連している。そのため、その大きさは一般に小さく、常磁性的な性質を考慮しても、なお $\chi_m < 0$ となる物質が反磁性体と呼ばれる。一方、例外的に大きな反磁性（完全反磁性）を示す物質に超伝導体がある。この完全反磁性は超伝導体内部の磁束密度が0となり、外部磁界 $\mathbf{H}$ に対して $\mathbf{M} = [ \quad \text{㉝} \quad ]$ となることに起因している。この効果は [ ㉞ ] 効果と呼ばれる。

問1 文章中の空欄 [ ㉗ ] ~ [ ㉜ ] にあてはまる語句を答えよ。

問2 文章中の空欄 [ ㉘ ] ~ [ ㉚ ] にあてはまる数式または数値を答えよ。ただし空欄 [ ㉙ ] は数値を答えよ。

問3 1) 原子やイオンにおける基底状態の電子軌道を求めるにはフントの規則を適用すれば良い。下記のイオンにフントの規則を適用し、基底状態におけるスピン角運動量量子数、軌道角運動量量子数および全角運動量量子数の値を求めよ。

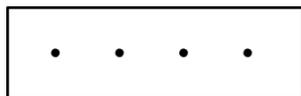


2) 真空中に存在する原子の磁氣的応答は，主に(a)電子のスピン，(b)電子の軌道角運動量，そして(c)外部磁界によって誘起される軌道角運動量の変化の3つの寄与からなる．これら3つはそれぞれ常磁性または反磁性的性質のどちらに強く寄与するか記せ．

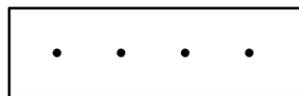
3) 下記に示した原子またはイオンについて，常温・常圧下において常磁性体および反磁性体となるものをそれぞれすべて選べ．



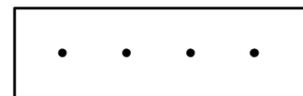
問4 1) 下記の図を解答用紙に書き写し，「 $\cdot$ 」で示す格子点の位置に強磁性相，反強磁性相およびフェリ磁性相における磁気モーメント（矢印  $\uparrow$ ）の配列の模式図をそれぞれの相の違いが分かるように描け．ただし，外部磁界は印加されていないものとする．矢印の長さが磁気モーメントの大きさを表すとする．



強磁性相



反強磁性相



フェリ磁性相

2) 縦軸を $\chi_m$ ，横軸を絶対温度 $T$ として強磁性体および反強磁性体のそれぞれの媒質の常磁性相における $\chi_m$ の温度依存性の概形を図示せよ．ただし，図中では必要に応じキュリー温度 $T_C$ ，特性温度またはキュリー・ワイス温度 $\theta_N$ およびネール温度 $T_N$ を示すこと．なお， $T_C, \theta_N, T_N > 0$ とする．

### 量子電子物性3 単語の英訳

磁性体：	magnetic material
真空の透磁率：	vacuum permeability
素電荷：	elementary charge
スカラー積：	scalar product
ベクトル積：	vector product
相加平均：	arithmetic mean
磁界：	magnetic field
磁化：	magnetization
磁束密度：	magnetic flux density
基礎物理定数：	fundamental physical constant
磁気モーメント：	magnetic moment
反磁性：	diamagnetism
常磁性：	paramagnetism
強磁性：	ferromagnetism
フェリ磁性：	ferrimagnetism
反強磁性：	antiferromagnetism
古典論：	classical theory
原子核：	nucleus
環状電流：	circular current loop
角運動量：	angular momentum
歳差運動：	precession
誘導電流：	induced current
超伝導体：	superconductor
量子数：	quantum number
軌道角運動量：	orbital angular momentum
キュリー温度：	Curie temperature
キュリー・ワイス温度：	Curie-Weiss temperature

【信号処理】 解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

1. 連続時間信号  $x(t)$  に対し、連続時間信号  $y(t)$  を

$$y(t) = x(t) e^{j\omega_c t} \sin(\omega_c t)$$

と与える。ここで、 $t$  は連続的な時刻を表す実数、 $\omega_c$  は角周波数を表す正の実数である。以下の問いに答えよ。

- (i)  $\sin(\omega_c t)$  のフーリエ変換を求めよ。ただし、以下の定義に従うデルタ関数  $\delta(t)$  を用いても良いとする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

ここで、 $t_0$  は時刻を表す。また、 $f(t)$  のフーリエ変換  $\mathcal{F}[f(t)]$  を  $F(\omega)$  としたとき ( $\omega$  は角周波数を表す)、フーリエ変換の双対性  $\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$  を適宜用いて良い。

- (ii)  $x(t)$  の周波数スペクトルを  $X(\omega)$  としたとき、 $X(\omega)$  を用いて、 $y(t)$  の周波数スペクトル  $Y(\omega)$  を表せ。
- (iii)  $x(t)$  を、角周波数  $-\omega_M$  から  $\omega_M$  の範囲で帯域制限したとする。つまり、 $x(t)$  の周波数スペクトル  $X(\omega)$  は  $|\omega| \geq \omega_M$  で 0 である。また、 $\omega_M$  は正の実数であり、 $\omega_M < \omega_c$  である。周波数応答、

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & (|\omega| \leq \omega_L) \\ 0 & (|\omega| > \omega_L) \end{cases}$$

を持つ理想的なローパスフィルタによって、 $y(t)$  から  $ax(t)$  を抽出可能な  $\omega_L$  の範囲を求めよ。ここで、係数  $a$  は任意の複素数であり、求める必要はない。

2. システム  $L$  へ入力した離散時間信号  $x[n]$  とその出力である離散時間信号  $y[n]$  には以下の関係がある。

$$y[n] = L[x[n]] = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} x[n-m]$$

ここで、 $n$  は離散的な時刻を表す整数、 $M$  は 2 以上の整数である。以下の問いに答えよ。また、解答には、以下の定義に従う離散時間信号  $g[n]$  の  $z$  変換  $G(z)$  および離散時間フーリエ変換  $G(\Omega)$  を用いて良い。

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] z^{-n}, \quad G(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] e^{-j\Omega n}$$

- (i)  $z$  変換により得られるシステム  $L$  の伝達関数を  $H(z)$  とするとき、システム  $L$  の周波数応答  $H(\Omega)$  の  $0 \leq \Omega \leq \pi$  における振幅特性および位相特性を求めよ。ただし、 $\Omega$  は正規化角周波数である。
- (ii) システム  $L$  に離散時間信号  $x[n] = u[n]u[-n+2]$  を入力する。 $M = 2$  としたとき、システム  $L$

の出力である離散時間信号  $y[n]$  を,  $u[n]$ を用いず表せ. ただし,  $u[n]$  は以下のように定義される.

$$u[n] = \begin{cases} 1 & (n \geq 0) \\ 0 & (n < 0) \end{cases}$$

- (iii) システムを設計する際には, 入出力差分方程式  $\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$  の係数  $a_k$  および  $b_k$  を所望の周波数応答  $H(\Omega)$  が得られるように定める. このようなシステム設計を行うとき, 一般的には  $z$ 変換を行い, 信号解析を行う. しかし, 最終的には周波数応答を求めるにも関わらず, 離散時間フーリエ変換を直接用いずに  $z$ 変換を介するのはなぜか述べよ.

専門用語の英訳	
角周波数	angular frequency
フーリエ変換	Fourier transform
デルタ関数	delta function
双対性	duality
入出力差分方程式	input-output difference equation
$z$ 変換	$z$ transform
伝達関数	transfer function
正規化角周波数	normalized angular frequency
離散時間フーリエ変換	discrete time Fourier transform