

2024 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報通信工学専攻

専門科目試験問題 (量子情報エレクトロニクスコース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて16ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「量子電子物性1」、「量子電子物性2」、「量子電子物性3」、「制御工学」、及び、「信号処理」、の全部で5題あり、この順番に綴じられている。このうち、3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【量子電子物性1】 解答は、桃色の解答用紙に記入すること

金属に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、電子の静止質量を m 、ボルツマン定数を k_B 、素電荷を e 、プランク定数を h とする。

一つの原子が一つの自由電子を供給する金属について考える。金属中では[下線]パウリの排他律が成り立っており、個々の電子は離散的なエネルギーを持つ。今、一辺が L 、体積が $V (= L^3)$ の3次元結晶を考える。簡単のために周期的境界条件を考え、シュレーディンガー方程式を解くと、量子化した電子のエネルギー ε は、整数 n の組 (n_x, n_y, n_z) を用いて、

$$\varepsilon = \frac{h^2}{8\pi^2m} \left(\left[\text{①} \right] \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1)$$

と求められる。 $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ であり、対応する波数 k の組 (k_x, k_y, k_z) は

$$k_x = \left[\text{①} \right] \times n_x, \quad k_y = \left[\text{①} \right] \times n_y, \quad k_z = \left[\text{①} \right] \times n_z \quad (2)$$

と書ける。今、電子数が非常に大きい場合には、離散的な電子のエネルギーおよび波数 k は連続的とみなしてよく、式(1)は

$$\varepsilon = \frac{h^2}{8\pi^2m} k^2 \quad (3)$$

と書き換えられる。

波数空間では、体積 $\left(\left[\text{①} \right] \right)^3$ の中に、スピンを考慮すれば二つの状態が存在する。また絶対零度では、フェルミ波数 k_F 以下では全ての状態は満たされ、それ以上の状態は占有されていないと考えることができるので、波数空間におけるフェルミ球の体積は、 k_F を用いて $\left[\text{②} \right]$ と考えてよい。よって、絶対零度では、体積 V の実空間にある電子数 N_0 は、スピンを考慮して、 $N_0 = \left[\text{③} \right] \times V$ となり、単位体積当たりの電子数 n_0 は $n_0 = \left[\text{③} \right]$ と書ける。

次に、エネルギー ε における状態密度を $Z(\varepsilon)$ とし、 ε と微小エネルギー $d\varepsilon$ だけ離れたエネルギー $\varepsilon + d\varepsilon$ の間に存在する単位体積当たりの独立な電子の状態の数 $Z(\varepsilon)d\varepsilon$ を求める。 ε 以下の全状態数は $\int_0^\varepsilon Z(\varepsilon')d\varepsilon'$ で与えられる。よって

$$Z(\varepsilon)d\varepsilon = \left[\text{④} \right] \times d\varepsilon \quad (4)$$

と求められる。有限温度の電子密度は、状態密度と分布関数の積を全電子エネルギーで積分することで求めることができる。

金属中の電子は、温度 T [K]においてフェルミ・ディラック統計に従う。その電子のエネルギー ε に対する分布関数（存在確率） $f(\varepsilon)$ は、金属のフェルミエネルギーを ε_F [eV]とすると、

$$f(\varepsilon) = [\quad \text{⑤} \quad] \quad (5)$$

と書ける. この関数は絶対零度のとき, $\varepsilon < \varepsilon_F$ では $f(\varepsilon) = [\quad \text{⑥} \quad]$, $\varepsilon > \varepsilon_F$ では $f(\varepsilon) = [\quad \text{⑦} \quad]$ となる. このときの ε_F は, 式(3)と n_0 を用いて,

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{8\pi^2 m} (3\pi^2 n_0)^{2/3} \quad (6)$$

で与えられる.

今, 金属が室温に置かれているとする. 室温近傍では, 熱エネルギー $k_B T$ は ε_F に比べて十分小さいので, ε_F は絶対零度の状態とほぼ同じであるとして差し支えない. 金属中の自由電子はフェルミ速度で散乱体と衝突を繰り返し, この衝突と衝突の間の平均距離は [$\quad \text{⑧} \quad]$ とよばれる. 一般的に, 金属の抵抗率は室温近傍で [$\quad \text{⑧} \quad]$ に反比例し, 温度に比例する.

金属の抵抗値を室温以下で測定したところ, 図 1-1 に示すような二種類の特性が観測された. なお, 抵抗は, 300 K の値で規格化されている. 特性⑦では, 極低温で一定値 R_0 に収束した. 一方, ある金属では, 特性⑧のように突然, 抵抗値がゼロとなった. この現象を [$\quad \text{⑨} \quad]$ 転移と呼び, その特性を示す材料を [$\quad \text{⑨} \quad]$ 体と呼ぶ.

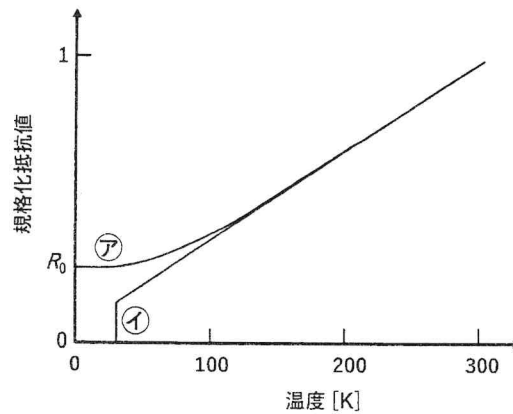


図 1-1

次に高温の場合を考える. 金属が非常に高温に加熱されると, 電子が金属の仕事関数 ϕ [eV]を超えて, 真空中に放出される現象(熱電子放出)が始まる. このとき, フェルミ・ディラック分布がボルツマン分布で近似でき,

$$f(\varepsilon) = [\quad \text{⑩} \quad] \quad (7)$$

とかける. 放出される前に電子がもつ全エネルギー ε と分布関数 $f(\varepsilon)$ は, 放出された電子がもつ運動エネルギーを ε_1 とすると,

$$\varepsilon = \varepsilon_F + [\quad \textcircled{11} \quad] \quad (8)$$

$$f(\varepsilon) = [\quad \textcircled{12} \quad] \quad (9)$$

となる.

この分布関数と表面から放出する高エネルギー電子の総数から単位面積当たりの電流 J_S は

$$J_S = -AT^2 \times \exp\left(-\frac{\phi}{k_B T}\right) \quad (10)$$

と表すことができる. この式の係数 A は [$\textcircled{13}$] 定数とよばれ, 理想的な値は 120×10^4 [$\text{A m}^{-2} \text{K}^{-2}$]と計算される.

- 問1 文章中の空欄 [$\textcircled{1}$] ~ [$\textcircled{13}$] に当てはまる適切な語句, 数値または数式を答えよ. [$\textcircled{3}$] は k_F , [$\textcircled{4}$] は m , ε , また [$\textcircled{12}$] は ε_1 , ϕ を用いよ.
- 問2 文章中の下線のパウリの排他律について, 少なくとも「フェルミ粒子」, 「電子のエネルギー準位」, 「スピン」を用いて 100 字以内で説明せよ.
- 問3 金属である銀の結晶構造は面心立方格子構造である. 以下の計算では, $m = 9.0 \times 10^{-31} \text{kg}$, $k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{J K}^{-1}$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$, $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{J s}$, $\pi = 3$ および $(62.5)^{2/3} \cong 16$ を用いてよい.
- 1) 格子点を黒丸 (●) として, この構造を 3 次元的に描き示せ.
 - 2) 格子定数を 0.4 nm として, 単位体積 (1 m^3) 当たりの自由電子数を計算せよ. ただし, 一つの原子が一つの自由電子を供給するとする. 解答の最終的な有効数字は一桁とする.
 - 3) 絶対零度における銀の ε_F [eV]を求めよ. 解答の最終的な有効数字は一桁とする. ただし, 電子の質量は静止質量とみなす.
- 問4 図 1-1 中の特性 $\textcircled{7}$ を示す金属の室温以下での抵抗には二つの散乱要因が主に寄与している. 各散乱要因とそれぞれの特性 $\textcircled{7}$ への寄与を説明せよ. ただし, 説明は 300 字以内とすること.

量子電子物性1 単語の英訳

ボルツマン定数 :	Boltzmann constant
素電荷 :	elementary charge
プランク定数 :	Planck constant
自由電子 :	free electron
パウリの排他律 :	Pauli exclusion principle
離散的 :	discrete
周期的境界条件 :	periodic boundary condition
シュレーディンガー方程式 :	Schrödinger equation
量子化 :	quantization
波数空間 :	wavenumber space
スピン :	spin
フェルミ波数 :	Fermi wavenumber
フェルミ球 :	Fermi sphere
絶対零度 :	absolute zero temperature
状態密度 :	density of states
フェルミ・ディラック統計 :	Fermi-Dirac statistics
分布関数 :	distribution function
存在確率 :	existence probability
フェルミ速度 :	Fermi velocity
散乱体 :	scatterer
抵抗値 :	resistance
規格化 :	normalization
仕事関数 :	work function
ボルツマン分布 :	Boltzmann distribution
面心立方格子構造 :	face-centered cubic lattice structure

【量子電子物性2】 解答は、緑色の解答用紙に記入すること。

半導体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数を k_B 、素電荷を e 、真空の誘電率を ϵ_0 、 n 型半導体の比誘電率を κ 、金属中及び半導体中の伝導電子の有効質量を m^* とする。

図 2-1(a)に示すような n 型半導体の両端に、それぞれショットキー接触界面を形成する電極（ショットキー電極）とオーム性接触界面を形成する電極（オーミック電極）を有するショットキーバリアダイオードについて、電流－電圧特性と空乏層の静電容量を考える。順方向を正とする電圧 V 印加時におけるショットキー電極と n 型半導体の界面近傍でのエネルギー帯図は図 2-1(b)のように表すことができる（空乏層以外での電圧降下は無視できるものとする）。 V_d は n 型半導体の拡散電位、 ϵ_c および ϵ_v はそれぞれ伝導帯の下端および価電子帯の上端のエネルギー、 ϵ_F はショットキー電極のフェルミエネルギー、 ϕ_B はショットキー電極側から見たエネルギー障壁高さである。ここで、電子の分布関数がボルツマン分布に近似できることとする。また、図 2-1(b)に示すように接触界面と垂直な方向を x 軸とする。界面に垂直方向の速度 $v_x (> 0)$ の電子が障壁より大きいエネルギーをもつ場合に、電流に寄与する熱電子放出モデルを考える。絶対温度 T においてショットキー電極から半導体へ流れる電子による電流密度 J_{MS} は、ショットキー電極中の電子密度を n_M 、積分範囲を以下の式(1)として、式(2)および式(3)で表される。

$$v_{\min} < v_x < \infty \quad \left(v_{\min} \equiv \left(\frac{2 \times [\text{①}]}{m^*} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (1)$$

$$J_{MS} = en_M \left(\frac{m^*}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{v_{\min}}^{\infty} v_x \exp \left(-\frac{m^* v_x^2}{2k_B T} \right) dv_x \quad (2)$$

$$= en_M \left(\frac{k_B T}{2\pi m^*} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{[\text{①}]}{k_B T} \right) \quad (3)$$

半導体からショットキー電極に流れる電子による電流密度 J_{SM} は、同様に n 型半導体中の電子密度を n_S として以下の式で表される。

$$J_{SM} = en_S \left(\frac{k_B T}{2\pi m^*} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{[\text{②}]}{k_B T} \right) \quad (4)$$

図 2-1(b)について熱平衡状態 ($V = 0$) を考えると、電子密度 n_S は、伝導帯の有効状態密度を N_C として以下の式(5)のように表すことができる。

$$n_S = N_C \exp \left(-\frac{[\text{③}]}{k_B T} \right) \quad (5)$$

また、熱平衡状態では $J_{SM} = J_{MS}$ であることに加え、式(5)を式(4)に代入すると以下の関係式が求まる。

$$n_M = [\text{④}] \quad (6)$$

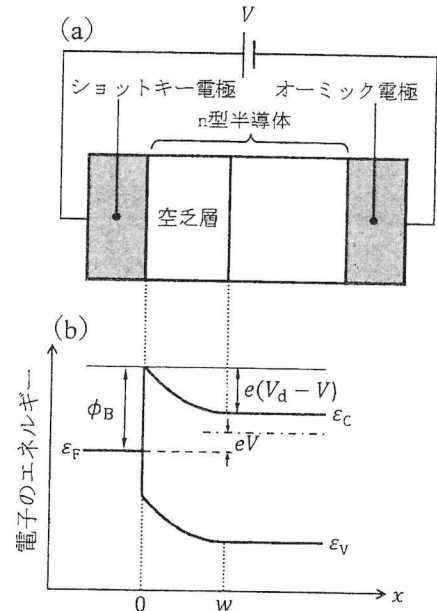


図 2-1

よって、電圧 V 印加時におけるショットキー障壁を流れる電流密度 $J = J_{SM} - J_{MS}$ は、式(5)を式(4)に代入し、式(6)を式(3)に代入することで以下の式(7)のように表すことができる。

$$J = J_{SM} - J_{MS} = eN_C \left(\frac{k_B T}{2\pi m^*} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \frac{[\text{①}]}{k_B T} \right) \left\{ \exp \left(\frac{[\text{⑤}]}{k_B T} \right) - 1 \right\} \quad (7)$$

次に、ショットキー電極と n 型半導体が接触する界面 ($x = 0$) を境に n 型半導体側に形成された幅 w の空乏層の静電容量について、一次元モデルを考える。空乏層内では、ドナー不純物が濃度 N_D で均一に存在しており (アクセプタ不純物は考慮しない)、全てイオン化しているものとする。また、ここでは空乏層内にキャリアは存在しないものとする。

位置 $x = 0$ における電位を基準とした電位を $\varphi(x)$ とすると、空乏層内 ($0 \leq x \leq w$) における電位は以下のポアソンの方程式から求められる。

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = - [\text{⑥}] \quad (0 \leq x \leq w) \quad (8)$$

ここで、空乏層端 ($x = w$) において電界が存在しないことから以下の境界条件が成り立つ。

$$\left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=w} = 0 \quad (9)$$

式(8)を1回積分することに加え、式(9)の適用により以下のように記述できる。

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = [\text{⑦}] \quad (0 \leq x \leq w) \quad (10)$$

次に、 $\varphi(0) = 0$ であることから $\varphi(w)$ は図 2-1(b)により、以下のように表される。

$$\varphi(w) = [\text{⑧}] \quad (11)$$

式(10)を積分し、式(11)を用いると下記の式を得ることができる。

$$\varphi(x) = [\text{⑨}] \quad (0 \leq x \leq w) \quad (12)$$

以上の式より $V < V_d$ の場合、空乏層幅 w は下記のように求まる。

$$w = [\text{⑩}] \quad (13)$$

したがって空乏層内の単位面積当たりの空間電荷量 Q は、

$$Q = [\text{⑪}] \quad (14)$$

となり、単位面積当たりの空乏層の静電容量 C が次のように求まる。

$$C \equiv - \frac{dQ}{dV} = [\text{⑫}] \quad (15)$$

最後に、オーミック電極について考える。n 型半導体の仕事関数に比べて金属電極の仕事関数が [⑬ (大きい・小さい)] 場合にオーム性接触となる。一方、p 型半導体と金属電極の接触についても同様に仕事関数の大小関係を考慮する必要があるが、[下線]Si に比べて、p 型のワイドバンドギャップ半導体は、オーム性接触を得ることが仕事関数の観点からは困難であることが知られており、不純物濃度を高くする等、別の手段でオーム性接触を得るのが主流である。

- 問1 文章中の空欄 [①] ~ [⑫] にあてはまる数式を答え, [⑬] にあてはまる適切な語句を選ぶこと. ただし, ①~⑫については ϵ_c と ϵ_F , ④については n_S , および⑫については w を使用しないこと.
- 問2 式(15)より, ショットキー接触の空乏層容量-電圧特性を測定することで不純物濃度 N_D を求めることが可能であるが, n型半導体のドナー濃度が高い場合については測定が困難である. その理由について, 式(13)を参考に 100 字以内で説明せよ. また, ドナー濃度が高い場合についても測定可能な手法を述べよ.
- 問3 理想的なショットキー接触であればエネルギー障壁高さ ϕ_B は, 金属電極の仕事関数と n 型半導体の電子親和力の差分に相当する. しかし実際には, 半導体に形成される界面準位の影響で異なる値を示すことが多い. この準位の形成要因について, 50 字以内で説明せよ.
- 問4 電圧を印加しない熱平衡状態におけるショットキー接触において, エネルギー障壁高さ ϕ_B が 0.75 eVである場合の拡散電位 V_d を単位も含めて有効数字 2 桁で答えよ. ただし, 素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, ボルツマン定数 $k_B = 1.4 \times 10^{-23}$ JK⁻¹, 温度を300 K, ドナー濃度 $N_D = 6.0 \times 10^{17}$ cm⁻³, 伝導帯の有効状態密度 N_C を 3.0×10^{19} cm⁻³とする. 必要であれば, $\ln 2 = 0.69$, $\ln 3 = 1.1$, $\ln 5 = 1.6$ を用いよ.
- 問5 文章中の下線について, p型のワイドバンドギャップ半導体において, オーム性接触を得るのが仕事関数の観点から困難である理由を以下の表 2-1 の一般的に電極材料として用いられる金属の仕事関数および表 2-2 の半導体の物性値を参考に 100 字以内で説明せよ.

表 2-1

金属	仕事関数 (eV)
Au	5.4
Pt	5.9
Cu	4.9
Ni	5.2

表 2-2

半導体	バンドギャップ エネルギー(eV)	正孔移動度 (cm ² V ⁻¹ s ⁻¹)	電子親和力 (eV)
Si	1.1	600	4.1
SiC	3.3	115	3.8
GaN	3.4	150	4.1

量子電子物性2 単語の英訳

半導体 :	semiconductor
素電荷 :	elementary charge
有効質量 :	effective mass
真空 :	vacuum
誘電率 :	permittivity
接触界面 :	contact interface
ショットキー接触 :	Schottky contact
オーム性接触 :	Ohmic contact
空乏層 :	depletion layer
静電容量 :	capacitance
電圧降下 :	voltage drop
エネルギー帯 :	energy band
拡散電位 :	diffusion potential
伝導帯 :	conduction band
フェルミエネルギー :	Fermi energy
エネルギー障壁高さ :	energy barrier height
分布関数 :	distribution function
絶対温度 :	absolute temperature
熱平衡状態 :	thermal equilibrium
ポアソンの方程式 :	Poisson's equation
境界条件 :	boundary condition
仕事関数 :	work function
不純物 :	impurity
電子親和力 :	electron affinity
界面準位 :	interface level

【量子電子物性3】 解答は、灰色の解答用紙に記入すること。

誘電体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。

分子気体に電界を加えたときに生じる分極について考える。まず、誘電体の巨視的物理量である比誘電率と、物質中の各構成要素に着目した微視的な分極率との関係式として知られている [㉞] の式を導く。印加電界（大きさ E ）によって分極（大きさ P ）が生じる誘電体を考える。微視的な観点で、誘電体が j 種の分極起源をもち、それぞれの起源 i ($i = 1, 2, \dots, j$) の分極率を α_i 、密度を N_i とする。起源 i に一定の局所電界（大きさ E_{loc} ）が作用すると、誘起される双極子モーメントの大きさ μ_i は

$$\mu_i = [\quad \text{㉟} \quad] \quad (1)$$

となる。分極 P は分極率 α_i などを用いて

$$P = [\quad \text{㊱} \quad] \quad (2)$$

となる。ローレンツの関係（局所電界係数は1とする）が成り立つとすると、真空の誘電率 ϵ_0 、 E 、 P を用いて E_{loc} は

$$E_{loc} = [\quad \text{㊲} \quad] \quad (3)$$

と表せる。式(2)、(3)および電束密度と分極 P の関係から、比誘電率 κ を用いて [㊳] の式

$$[\quad \text{㊴} \quad] \quad (4)$$

が得られる。一方、分子気体の密度が小さく分子間相互作用が弱い場合、局所電界は $E_{loc} = E$ と仮定でき、 [㊴] の式は

$$\kappa = [\quad \text{㊵} \quad] \quad (5)$$

と求まる。

分子内の正電荷と負電荷の重心位置が一致しない分子は、双極子モーメントを有している。この双極子モーメントは外部電界がなくとも存在するので [㊶] 双極子とよばれ、これをもつ分子を [㊷] 分子とよび、外部電界との相互作用により [㊸] 双極子が回転して分極が誘起されることがある。この原理で生じる分極を [㊹] 分極とよぶ。いま、 [㊸] 双極子モーメントの大きさを μ_1 とし、絶対温度 T における分極の電気的なエネルギー $\mu_1 E_{loc}$ と熱的なエネルギー $k_B T$ の比を $t = \mu_1 E_{loc} / (k_B T)$ とおくと、 E_{loc} によって誘起される [㊹] 分極 P_1 は

$$P_1 = N_1 \mu_1 \{ \coth(t) - 1/t \} \quad (6)$$

で与えられる。ここで、 k_B はボルツマン定数、 N_1 は単位体積当たりの [㊦] 双極子モーメントの数を表す。 $\coth(t) - 1/t$ は [㊧] 関数とよばれ、 $L(t)$ で表される。一般に、極低温をのぞいて $t \ll 1$ であり、 $t \ll 1$ では $\coth(t) = 1/t + t/3 - t^3/45 + \dots$ の関係が成り立つことを用いると

$$L(t) \cong [\text{㊨}] \quad (7)$$

と近似できる。それゆえ、 [㊩] 分極の分極率を α_1 とすると

$$\alpha_1 = [\text{㊪}] \quad (8)$$

で与えられる。

次に、分極起源が電子分極、イオン分極、 [㊫] 分極の3種のみからなり、電子分極率を α_2 、イオン分極率を α_3 、簡単のため単位体積あたりの各分極起源の密度が全て N である場合を考える。式(4)に式(8)の右辺を代入すると

$$[\text{㊬}] \quad (9)$$

となる関係が導かれる。この式は比誘電率が温度に依存しない項と依存する項の和で構成されており、一般に [㊭] の式と呼ばれる。局所電界が $E_{loc} = E$ と仮定できる場合、

$$\kappa - 1 = [\text{㊮}] \quad (10)$$

と求まる。

問1 文章中の空欄 [㊯] ~ [㊰] にあてはまる語句を答えよ。

問2 文章中の空欄 [㊱] ~ [㊲] にあてはまる数式を答えよ。なお、空欄 [㊳]、 [㊴] は T を含む数式とすること。

問3 文章中の関数 $L(t)$ について、横軸を t として $L(t)$ の概形を、 $t \gg 1$ における $L(t)$ の漸近値が分かるように図示せよ。また、 $t \ll 1$ における近似線を破線で示すこと。

問4 式(10)の関係が成り立ち、イオン分極の寄与が無視できる分子気体に関する以下の問いに答えよ。

- 1) クロロメタン (塩化メチル) の比誘電率の室温付近の温度依存性について、縦軸を $\kappa - 1$ 、横軸を $1/T$ として概形を図示せよ。なお、縦軸および横軸の数値についてはここでは問わない。
- 2) クロロメタンの比誘電率の温度依存性と単位体積あたりの各分極起源の密度が既知の場合、(a) [㊦] 双極子モーメントの大きさと (b) 電子分極率はどのように求めることができるかそれぞれ説明せよ。
- 3) 気体状態のテトラクロロメタン (四塩化炭素) について、比誘電率の温度依存性はどのような概形になるか、理由も含めて文章で説明せよ。

量子電子物性3 単語の英訳

誘電体：	dielectric
分子気体：	molecular gas
比誘電率：	relative permittivity
分極率：	polarizability
局所電界：	local electric field
双極子モーメント：	dipole moment
局所電界係数：	local electric field coefficient
電束密度：	electric flux density
ボルツマン定数：	Boltzmann constant
電子分極：	electronic polarization
イオン分極：	ionic polarization
概形：	outline
漸近値：	asymptotic value
近似線：	approximate line
破線：	dashed line
クロロメタン：	chloromethane
テトラクロロメタン：	tetrachloromethane

【制御工学】解答は、白色の解答用紙に記入すること。

以下の問1～問3に答えよ。

問1 以下の伝達関数 $G_1(s)$ で表現される線形時不変システム Σ_1 と、伝達関数 $G_2(s)$ で表現される線形時不変システム Σ_2 を考える。

$$G_1(s) = \frac{10}{s+5}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+10}$$

Σ_1 と Σ_2 それぞれのステップ応答を時間 t の関数 ($t \geq 0$) として表せ。

問2 図1のフィードバックシステムについて、以下の問いに答えよ。ただし、

$$P(s) = \frac{4s+1}{s^2(s+2)(s+1)}$$

であり、 $R(s)$ 、 $Y(s)$ はそれぞれ、入力を表す時間関数 $r(t)$ ($t \geq 0$) のラプラス変換、出力を表す時間関数 $y(t)$ ($t \geq 0$) のラプラス変換、 K は実数値をとる定数ゲインである。

- (i) $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数 $Y(s)/R(s)$ を求めよ。ただし、伝達関数における多項式は降べきの順（次数の高い順）に並べて書くこと。
- (ii) $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数 $Y(s)/R(s)$ のすべての極の実部が負となるための、 K に関する必要十分条件を求めよ。
- (iii) $K = 15/16$ とする。このとき、 $R(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数 $Y(s)/R(s)$ の極をすべて求めよ。また、この結果から、フィードバックシステムのステップ応答が (A) ある値に収束する、(B) 発散する、(C) 持続振動する、のいずれになるかを選べ。

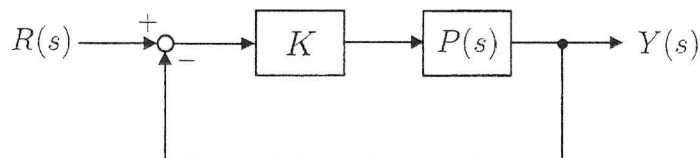


図1

問3 次の状態方程式と出力方程式で表現される線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ であり、 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ は状態、 $u(t)$ は入力、 $y(t)$ は出力を表し、 $t \geq 0$ とする。

(i) $U(s)$ と $Y(s)$ をそれぞれ、 $u(t)$ と $y(t)$ のラプラス変換とする。 $U(s)$ から $Y(s)$ への伝達関数 $Y(s)/U(s)$ を求めよ。ただし、伝達関数における多項式は降べきの順（次数の高い順）に並べて書くこと。

(ii) 入力 $u(t)$ を

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t > 1) \end{cases}$$

としたときの状態 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ をそれぞれ、 t の関数として求めよ。ただし、時刻 $t=0$ での初期状態を $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする。

(iii) k_1 と k_2 を任意の実数値をとるパラメータとする。

$$u(t) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

なる状態フィードバック制御を施したフィードバックシステムの極が -1 と -3 となるような、 k_1 の値と k_2 の値を求めよ。

(iv) k を任意の実数値をとるパラメータとする。

$$u(t) = -ky(t)$$

なる出力フィードバック制御を施したフィードバックシステムにおいて、実部が正となる極が存在するための、 k に関する必要十分条件を求めよ。

専門用語の英訳

伝達関数	transfer function
線形時不変システム	linear time-invariant system
ステップ応答	step response
フィードバックシステム	feedback system
ラプラス変換	Laplace transform
定数ゲイン	constant gain
多項式	polynomial
降べきの順	descending order of powers
極	pole
必要十分条件	necessary and sufficient condition
収束する	converge
発散する	diverge
持続振動する	oscillate persistently
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
状態フィードバック制御	state feedback control
出力フィードバック制御	output feedback control

【信号処理】 解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

1. 離散時間信号処理システム L (以降, システムと呼ぶ) は, 離散時間入力信号 $x[n]$ を処理し, 離散時間出力信号 $y[n] = L[x[n]]$ を生成するシステムである. 以下の問いに答えよ. なお, n は時刻を表す整数である.
 - (i) 離散時間入力信号を $ax_1[n] + bx_2[n]$ とする (a と b は定数). システムにおける線形性の定義を離散時間出力信号 $y[n] = L[ax_1[n] + bx_2[n]]$ を用いて述べよ. また, 下記に示すシステム (a)~(f) のうち, 線形性を満たすものを全て選択せよ.
 - (ii) システムにおける時不変性の定義を離散時間出力信号 $y[n] = L[x[n]]$ を用いて述べよ. また, 下記に示すシステム (a)~(f) のうち, 時不変性を満たすものを全て選択せよ.
 - (iii) システムにおける因果性の定義を述べよ. また, 下記に示すシステム (a)~(f) のうち, 因果性を満たすものを全て選択せよ.
 - (iv) システムにおける BIBO (Bounded Input Bounded Output) 安定の定義を述べよ. また, 下記に示すシステム (a)~(f) のうち, BIBO 安定であるものを全て選択せよ.
 - (v) システムが, 線形性と時不変性を満たし, 記憶性を満たさないとき, 離散時間入力信号 $x[n]$ と離散時間出力信号 $y[n]$ の関係を述べよ.

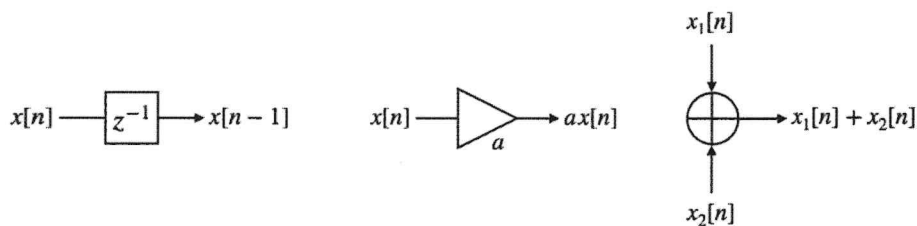
(a) $y[n] = x[5n]$	(b) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$	(c) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x[k]$
(d) $y[n] = n^2 x[n]$	(e) $y[n] = (x[n])^2$	(f) $y[n] = x[n] + 1$

2. 入出力差分方程式

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] - cx[n-1]$$

で表される離散時間信号処理システム L について, 以下の問いに答えよ. なお, n は時刻を表す整数である.

- (i) システム L の回路構成を下図に示す素子を使って図示せよ. 素子は左から, 1 タイムスロット遅延, 定数倍, 加算を表す. 信号の方向を表す矢印を明示すること.



- (ii) このシステムの z 領域伝達関数 $H(z)$ を求めよ.
- (iii) $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$ のとき, このシステムの $0 \leq \Omega \leq \pi$ における周波数応答は

$$Ae^{-j\frac{\Omega}{2}}$$

で表される。なお、 j は虚数単位 ($j^2 = -1$)、 Ω は正規化角周波数を表す。振幅特性 A を求めよ。

専門用語の英訳	
入出力差分方程式	input-output difference equation
離散時間信号処理システム	discrete-time signal processing system
z 変換	z transform
伝達関数	transfer function
線形	linear
時不変	time-invariant
振幅特性	amplitude response
因果性	causality
安定性	stability
記憶	memory