2021 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

専門科目試験問題
（電気工学コース）

（実施時間　１４：００ ～ １６：００）

【注　意　事　項】

１．問題用紙は，この表紙や白紙を除いて２５ページある．解答開始の指示があるまで開いてはいけない．解答開始後，落丁や不鮮明な箇所等があった場合は，手を挙げて監督者にその旨を伝えること．

２．試験問題は，①「制御工学」，②「電磁気工学」，③「量子電子物性１」，「量子電子物性２」，「量子電子物性３」，「量子電子物性４」，及び，④「信号処理」，の全部で４分野（①～④）７題あり，この順番に綴じられている．この４分野（①～④）７題のなかから２分野以上３題を選択し解答すること．

３．解答開始前に，別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと．

４．問題用紙は持ち帰ってもよい．

【制御工学】解答は，白色（１番）の解答用紙に記入すること．

以下の問 1〜問 3 に答えよ．

問 1 図 1 のフィードバックシステムについて，以下の問いに答えよ．ただし，$R(s)$, $C(s)$ はそれぞれ時間関数 $r(t)$, $c(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換，$E(s)$ は $e(t) = r(t) - c(t)$ $(t \geq 0)$ のラプラス変換を表す．また，

$$K(s) = \frac{k}{s}, \qquad P(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)}$$

であり，k は正の実数値をとるパラメータである．

(i) 伝達関数が $P(s)$ で表される線形時不変システムのインパルス応答を時間 t の関数 $(t \geq 0)$ として表せ．

(ii) $R(s)$ から $C(s)$ までのフィードバックシステムが安定となるための k に関する必要十分条件を求めよ．

(iii) $k = 5$ としたとき，$r(t) = t$ $(t \geq 0)$ なる単位ランプ入力に対する定常偏差 $\lim_{t \to \infty} e(t)$ を求めよ．

(iv) 開ループ伝達関数 $L(s) = P(s)K(s)$ に対する位相 $\angle L(j\omega)$ が -180° となるときの角周波数 ω の値を求めよ．ただし，j は虚数単位を表し，$\angle L(j\omega)$ は $L(j\omega)$ の偏角を表す．

(v) フィードバックシステムのゲイン余裕が 20 dB となるときの k の値を求めよ．

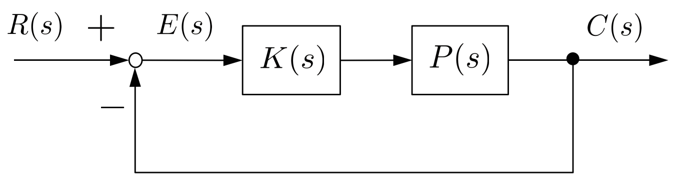

図 1

問 2 次の連立常微分方程式で表現される 1 入力 2 出力の線形時不変システムについて，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 2\dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2} + \dfrac{dy_1(t)}{dt} - 5y_1(t) = 0 \\ \\ 4\dfrac{d^2y_1(t)}{dt^2} + 4\dfrac{d^2y_2(t)}{dt^2} + \dfrac{dy_2(t)}{dt} = u(t) \end{cases}$$

ここで，$u(t)$ は入力変数，$y_1(t)$ と $y_2(t)$ は出力変数である．

(i) $x_1(t) = y_1(t)$, $x_2(t) = \dfrac{dy_1(t)}{dt}$, $x_3(t) = y_2(t)$, $x_4(t) = \dfrac{dy_2(t)}{dt}$ を状態変数としたとき，このシステムの状態方程式

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t)$$

と出力方程式

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

における係数行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ と係数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$ は状態変数ベクトルであり，$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ は出力変数ベクトルである．

(ii) このシステムの可観測性行列を求めよ．さらに，それを用いて，このシステムの可観測性を判定せよ．ただし，その判定理由も述べること．

問 3 次の状態方程式で表現される 1 入力の線形時不変システムについて，以下の問いに答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

ここで，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ は状態変数ベクトル，$u(t)$ は入力変数である．

(i) $u(t) = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ $(t \geq 0)$ なる状態フィードバック制御を施したフィードバックシステムにおいて，状態変数 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ を t の関数 $(t \geq 0)$ として求めよ．ただし，時刻 $t = 0$ での初期状態を $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．

(ii) k を任意の実数値をとるパラメータとする．$u(t) = -\begin{bmatrix} 1 & k \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)$ $(t \geq 0)$ なる状態フィードバック制御を施したフィードバックシステムが安定であり，かつその極が異なる二つの実数となるための，k に関する必要十分条件を求めよ．

専門用語の英訳

フィードバックシステム	feedback system
ラプラス変換	Laplace transform
伝達関数	transfer function
線形時不変システム	linear time-invariant system
インパルス応答	impulse response
安定	stable
必要十分条件	necessary and sufficient condition
単位ランプ入力	unit ramp input
定常偏差	steady-state error
開ループ伝達関数	open-loop transfer function
位相	phase
角周波数	angular frequency
虚数単位	imaginary unit
偏角	argument
ゲイン余裕	gain margin
連立常微分方程式	simultaneous ordinary differential equations
入力変数	input variable
出力変数	output variable
状態変数	state variable
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
係数行列	coefficient matrix
係数ベクトル	coefficient vector
状態変数ベクトル	state variable vector
出力変数ベクトル	output variable vector
可観測性行列	observability matrix
可観測性	observability
状態フィードバック制御	state feedback control
極	pole

【電磁気工学】　解答は，黄色（2 番）の解答用紙に記入すること.

問１　以下の文章中の（ア）～（ケ）に適切な文字式，または語句を記入せよ.

真空中において，電場 $\boldsymbol{E}$ および磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中を，質量 m，電荷 q をもつ粒子が，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動していると考える．$\boldsymbol{v}$ の大きさは光速に比べて十分に小さく，相対論的効果は無視できるとする．また，粒子の運動は，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{B}$ に影響を与えないとする.

粒子の運動方程式は，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を用いて

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boxed{\text{（ア）}} \tag{1}$$

と表すことができる.

続いて，図１の直交座標系に，空間的に一様で，かつ，時間的に定常な電場 $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$，および磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0), (B_0 \neq 0)$ が印加されている場合を考えると，上記の運動方程式は，$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, 0)$に対して

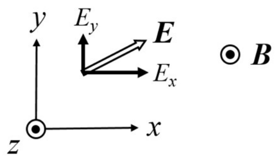

図1

$$m\frac{dv_x}{dt} = \boxed{\text{（イ）}} \tag{2}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = \boxed{\text{（ウ）}} \tag{3}$$

となる．式(2)と(3)から速度の 2 階微分を求めると

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \boxed{\text{（エ）}}\frac{dv_y}{dt} = -\boxed{\text{（エ）}}^2\left(v_x - \boxed{\text{（オ）}}\right) \tag{4}$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\boxed{\text{（エ）}}\frac{dv_x}{dt} = -\boxed{\text{（エ）}}^2\left(v_y + \boxed{\text{（カ）}}\right) \tag{5}$$

とかける．なお，$\boxed{\text{（エ）}}$ の絶対値は $\boxed{\text{（キ）}}$ 周波数と呼ばれ，以降，これを ω_{c} と定義する．式（4）と（5）の解として，実数部分のみをあらわすと，正の定数 $v_\perp$ を用いて

$$v_x = v_\perp \cos\omega_{\mathrm{c}} t \ + \boxed{\text{（オ）}} \tag{6}$$

$$v_y = -v_\perp \sin\omega_{\mathrm{c}} t \ - \boxed{\text{（カ）}} \tag{7}$$

とできる．ここで，$\boxed{\text{（オ）}}$，$\boxed{\text{（カ）}}$は，それぞれ電場ドリフト速度のx成分とy成分を示している．電場ドリフト速度を $\boldsymbol{v}_E$ とすると，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ をもちいて

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{E}} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}^2} \tag{8}$$

とできる.

次に，$\boldsymbol{E}$ が時間に関して変化する場合を考える．
$\boldsymbol{E}$ はx軸に平行であるとし，$\boldsymbol{E} = (E_x \cos \omega t, 0, 0)$で与える．また，$\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0), (B_0 \neq 0)$ は時間的に定常とし，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ は空間的に一様とする．なお，電場の時間変化の周波数 ω は，ω_{c} に比べて十分に小さいとする．
式(4)，(5)と同様に速度$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, 0)$の 2 階微分を求めると

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\boxed{\text{（エ）}}^2 \left(v_x - \boxed{\text{（ク）}}\right) \tag{9}$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\boxed{\text{（エ）}}^2 \left(v_y + \boxed{\text{（カ）}}\right) \tag{10}$$

となる．式（9）と（10）の解として，実数部分のみをあらわすと，粒子の速度は下記のように与えられる．

$$v_x = v_\perp \cos \omega_{\mathrm{c}} t + \boxed{\text{（ケ）}} \tag{11}$$

$$v_y = -v_\perp \sin \omega_{\mathrm{c}} t - \boxed{\text{（カ）}} \cos \omega t \tag{12}$$

ここで，$\boxed{\text{（ケ）}}$の絶対値は分極ドリフト速度の大きさを意味している．

問２　図２の実験装置では，十分に大きい並行平板電極の間を一様で希薄なプラズマで満たしている．このプラズマに対して，時間変化する電場 $\boldsymbol{E} = (E_x \cos \omega t, 0, 0)$と時間変化しない磁束密度 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0), (B_0 \neq 0)$ を印加する．電場と磁束密度は，プラズマ中では空間的に一様であるとする．プラズマ中の粒子の衝突は無視できるとする．電場ドリフトと分極ドリフトによってイオンと電子が受ける作用について，100～200 文字程度で簡潔に説明せよ．

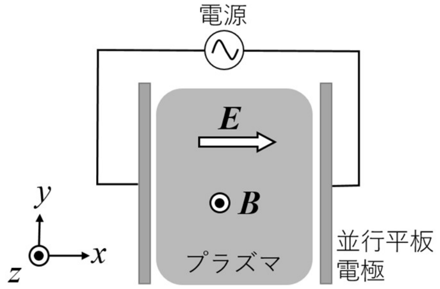

図2

専門用語の英訳

相対論的効果	relativistic effect
運動方程式	equation of motion
ドリフト	drift
周波数	frequency
分極	polarization

【量子電子物性1】 解答は，桃色（3番）の解答用紙に記入すること．

以下の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，ボルツマン定数をk_{B}，プランク定数hを2πで割ったものを$\hbar$とし，任意の空間座標をベクトル$\mathbf{r}$によって表すものとする．

シュレーディンガー方程式は物質波の従う波動方程式である．ポテンシャル$V(\mathbf{r})$の中でエネルギー固有値εを持って運動する質量mの粒子を考えると，その波動関数$\varphi(\mathbf{r})$が定常状態において満たすべき方程式は次式で与えられる．

［　①　］ (1)

シュレーディンガー方程式を用いて，金属結晶内で動き回る質量mの電子の運動を自由電子モデルによって解析する．自由電子モデルでは電子はポテンシャルの影響を受けないと考えるため，定常状態でシュレーディンガー方程式を満たす波動関数の一般解は，規格化因子をφ_0，波動の波数ベクトルを$\mathbf{k}$とすると以下のような平面波として記述できる．なお，$\mathbf{k}$は直交座標空間で成分（k_x，k_y，k_z）をもち，その大きさは$|\mathbf{k}| = k$で表されるものとする．

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_0 \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{2}$$

ここで$V(\mathbf{r}) = 0$とし，式(2)を式(1)に代入すると，電子のエネルギーと波数の関係が次の通り求まる．

$\varepsilon =$［　②　］ (3)

次に，ある自由電子密度をもつ金属中の自由電子が取り得る最大のエネルギーε_{F}を考える．簡単のため絶対零度の環境を考えると，自由電子は許容される固有状態を低エネルギー側から占有していく．このとき，ε_{F}はそれ以下のエネルギーをもつ自由電子の総固有状態数より算出することができる．

金属における自由電子の状態数を求めるために，周期的境界条件の成り立つ一辺の長さがLの仮想的な立方体を考える．この境界条件下では，波動の取り得る（k_x，k_y，k_z）の組み合わせはn_x，n_y，n_zを整数として次のものに制限される．

$k_x = n_x \times$［　③　］，　$k_y = n_y \times$［　③　］，　$k_z = n_z \times$［　③　］ (4)

波動の取り得る最大の波数をk_{F}（$\gg 1/L$）とし，その中に含まれる固有状態の数を考える．これは，（k_x，k_y，k_z）によって作られる直交座標空間を考えると分かりやすい．式(4)より，（k_x，k_y，k_z）空間での体積［　④　］あたりに一つの状態が存在するが，電子には上向きと下向きの二つのスピン自由度があるため，実際には二つの固有状態が許容される．大きさk_{F}の波数をもつ波動は（k_x，k_y，k_z）空間では半径がk_{F}の球面上に存在することから，大きさk_{F}以下の波数をもつ固有状態数$W(k_{\mathrm{F}})$は次式により得られる．

$W(k_{\mathrm{F}}) =$［　⑤　］ (5)

式(3)の分散関係を用いて式(5)をε_{F}を使って書き換えると，次の式が得られる．

$W(\varepsilon_{\mathrm{F}}) =$［　⑥　］ (6)

式(6)より，自由電子密度n（$=W(\varepsilon_{\mathrm{F}})/L^3$）が与えられた場合の電子の持ちうる最大のエネルギーは次のように求まる．

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = [\quad ⑦ \quad] \tag{7}$$

ここで求めたε_{F}はフェルミエネルギーとよばれる．

この議論に関連して得られる量としてフェルミ速度v_{F}およびフェルミ温度T_{F}がある．これらはnを用いて以下の式で与えられ，金属の性質を理解するために有用である．

$$\mathrm{v}_{\mathrm{F}} = [\quad ⑧ \quad] \tag{8}$$

$$T_{\mathrm{F}} = [\quad ⑨ \quad] \tag{9}$$

上に述べた波動の状態数の議論は，そもそも量子論が生まれる契機となった黒体輻射スペクトルの理論解析にも適用できる．そこで，一辺の長さがLの仮想的な立方体状の空洞を考え，その中に存在する電磁波の固有振動モードの数を考えることで黒体輻射スペクトルを導出する．電磁波も波動であり，さらに特定の伝搬方向に対し二つの固有偏光をもつことから，平面波の固有状態数として電子の場合と同じ表式（式(5)）が得られるが，電磁波の場合には，波数と振動数νの間に電子とは異なる分散関係が成立することを考慮しなければならない．具体的には，電磁波の伝搬速度cを用いて，$k=$［　⑩　］の分散関係が成り立つため，ある振動数以下の固有振動モードの数$W(\nu)$は次式で与えられる．

$$W(\nu) = [\quad ⑪ \quad] \tag{10}$$

上式から，微小な振動数区間に含まれる固有振動モードの単位体積当たりの数を求めると，次の式が得られる．

$$D(\nu) = \frac{1}{L^3}\frac{dW(\nu)}{d\nu} = [\quad ⑫ \quad] \tag{11}$$

古典物理学の考え方では，各々の固有振動モードに$k_{\mathrm{B}}T$のエネルギーが分配される．そのため，単位体積当たりに特定の振動数で輻射される光のエネルギー密度分布$I(\nu,T)$は次式で与えられることとなる．

$$I(\nu,T) = [\quad ⑫ \quad] \times k_{\mathrm{B}}T \tag{12}$$

この式は低振動数以外では実測されるスペクトルを再現できない問題があったが，プランクは輻射に寄与する各固有振動モードのエネルギーが量子化されるという仮説を立てることで，問題が解決されることを示した．すなわち，プランクは空洞中に存在する各固有振動モードが離散化されたエネルギー素量$h\nu$の整数倍のみ取りうると仮定し，分配されるエネルギーとして次の分布関数を得た．

$$F(\nu,T) = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_{\mathrm{B}}T)-1} \tag{13}$$

$D(\nu)$と$F(\nu,T)$の積で与えられるプランクの輻射公式は実際に観測されるスペクトルを良く再現する．ここで見られるように，微視的な世界においては粒子と波動の二重性が顕著に表れることは，量子論の重要な結論の一つであった．

問1　文章中の空欄［　①　］～［　⑫　］にあてはまる数式を答えよ.

問2　(1) 自由電子の密度が $6.4\times10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$ である金属のフェルミエネルギー ε_F を有効数字 1 桁のエレクトロンボルト単位で求めよ．また，この値は室温（300 K）の熱エネルギーと比べておよそ何倍大きいか，有効数字 1 桁まで答えよ．ただし $\hbar=1.1\times10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$，$k_\mathrm{B}=1.4\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$，$m=9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$，$\pi=3$ および素電荷の大きさを $e=1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$ として計算せよ.

(2) 古典論によれば自由電子は各々 $(3/2)\times k_\mathrm{B}T$ のエネルギーをもつため，全自由電子が熱容量に大きく寄与することが予想される．一方，室温において実験的に計測される熱容量はこの予想よりも 2 桁ほど小さく，量子論が登場するまで説明は不可能であった．自由電子の熱容量への寄与が電子を古典理想気体とみなしたものよりも小さく観測される理由について，電子の従う統計的性質および(1)の結果を用いて説明せよ.

問3　図 1-1 の（あ）～（え）は光子，電子，および中性子の波長とエネルギーの関係と，全く関係の無いデータを示している．光子，電子，および中性子がそれぞれどのグラフに対応するか，理由も含めて答えよ．必要であれば中性子の質量 $m_\mathrm{n}=1.7\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$，光速 $c_0=3.0\times10^{8}\ \mathrm{m/s}$ を用いよ.

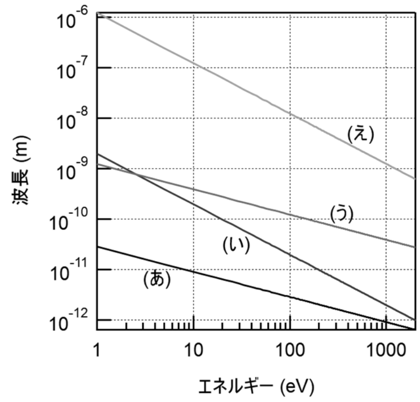

図 1-1

問4　図 1-2 は異なる温度における黒体輻射のエネルギー密度を波長に対して求め，規格化したものである．（あ）～（う）のスペクトルで最も高温なスペクトルを選べ．また，太陽光のスペクトルは黒体輻射のそれに近いことが知られている．図の中で太陽光のスペクトルに最も近いものを選べ.

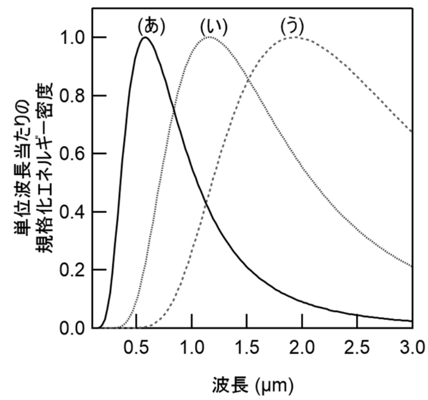

図 1-2

量子電子物性1　単語の英訳

ボルツマン定数：	Boltzmann constant
プランク定数：	Planck constant
空間座標：	space coordinate
シュレーディンガー：	Schrödinger
物質波：	matter wave
波動方程式：	wave equation
固有値：	eigenvalue
波動関数：	wave function
定常状態：	steady state
自由電子モデル：	free electron model
規格化因子：	normalization factor
波数ベクトル：	wave vector
平面波:	plane wave
直交座標空間：	orthogonal coordinate space
絶対零度：	absolute zero temperature
周期的境界条件：	periodic boundary condition
固有状態：	eigenstate
分散関係：	dispersion relationship
黒体輻射：	blackbody radiation
電磁波：	electromagnetic wave
固有偏光：	eigen-polarization
古典物理学：	classical physics
量子化：	quantize
二重性：	duality
熱容量：	heat capacity
中性子：	neutron

【量子電子物性2】 解答は，緑色（4番）の解答用紙に記入すること.

半導体物性に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，ボルツマン定数をk_Bとし，絶対温度をTで表す.

Si を例に半導体のバンド構造を考える．Si の結晶構造は［　　㋐　　］構造で，その逆格子は，面心立方格子の逆格子である［　　㋑　　］格子である．[下線1]<u>逆格子の原点と各逆格子点とを結ぶ直線の垂直2等分面を境界として囲まれる領域で最も体積が小さい領域を第一ブリルアン領域</u>とよぶ.

結晶中の Si 原子の価電子は最近接の Si 原子からの 4 個の価電子と［　　㋒　　］結合をしている．Si の最外殻は1つの3s軌道と3つの3p軌道で構成され,［　　㋓　　］混成軌道を形成する. この［　　㋒　　］結合に関与する電子は［　㋔（価電子帯・伝導帯）　］を形成する．価電子帯と伝導帯の間には，電子状態が存在しない領域が存在し，これを［　　㋕　　］とよぶ.

[下線2]<u>一般に半導体は，バンド構造において価電子帯の上端と伝導帯の下端の波数空間中の相対位置によって，2 つの種類に分けられる</u>．これは半導体の光学遷移と深く関係する.

以下では半導体中のキャリア密度を考える．まず不純物を含まない真性半導体を考える．フェルミエネルギーが伝導帯下端や価電子帯上端から十分離れ，［　　㋕　　］内にある場合，伝導帯の電子と価電子帯の正孔それぞれの分布関数はボルツマン分布関数で近似できる．ある絶対温度Tで伝導帯に励起される電子の密度nと価電子帯に励起される正孔の密度pは，フェルミエネルギーをε_F，伝導帯下端と価電子帯上端のエネルギーをそれぞれε_cとε_vとして，

$$n = N_c \exp(-[\quad ① \quad]) \tag{1}$$

$$p = N_v \exp(-[\quad ② \quad]) \tag{2}$$

となる．ここでN_cとN_vは伝導帯と価電子帯それぞれの［　　㋖　　］である．伝導帯下端と価電子帯上端のエネルギー差をε_gとして，式(1)と式(2)の積はN_c，N_v，ε_g，k_B，Tを用いて，

$$np = [\quad ③ \quad] \tag{3}$$

と表される．式(3)の関係は，フェルミエネルギーが［　　㋕　　］内の伝導帯下端や価電子帯上端から離れたところにあれば，真性半導体だけでなく不純物を含む半導体でも成り立つ.

真性半導体ではnとpの間に［　　④　　］の関係が成り立つので，nはN_c，N_v，ε_g，k_B，Tを使って，$n=$［　　⑤　　］である．また真性半導体のフェルミエネルギーはN_c，N_v，ε_c，ε_v，k_B，Tを使って$\varepsilon_F =$［　　⑥　　］と表される.

半導体に不純物を添加するとキャリアが供給される. 余剰電子を供給する不純物をドナーとよぶ. ドナーから供給された負電荷が伝導に寄与する半導体を n 型半導体とよぶ．ここである n 型半導体を考える.

ただしアクセプタによる補償は無視する．ドナー準位をε_D，その密度をN_Dとする．ドナー準位を電子が占有する確率を$f_\mathrm{D}\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right)$とすると，電子が占有するドナー準位の密度は$N_\mathrm{D}f_\mathrm{D}\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right)$である．したがって，イオン化したドナーの密度$N_\mathrm{D}^+$は$N_\mathrm{D}$と$f_\mathrm{D}\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right)$を使って［　⑦　］と表される．このとき，電荷中性条件によりn，p，N_D^+の間には，

$$n = [\quad ⑧ \quad] \tag{4}$$

の関係が成り立つ．

$k_\mathrm{B}T \gg \varepsilon_\mathrm{c} - \varepsilon_\mathrm{D}$をみたす温度領域では，ドナー準位の電子はすべて伝導帯に励起されているとして，$N_\mathrm{D}^+ = N_\mathrm{D}$と仮定すると，式(3)と式(4)から，$n$は$N_\mathrm{D}$，$N_\mathrm{c}$，$N_\mathrm{v}$，$\varepsilon_\mathrm{g}$，$k_\mathrm{B}$，$T$ を用いて，

$$n = [\quad ⑨ \quad] \tag{5}$$

となる．次にこの温度領域を“高温領域”と“中間領域”に分けて考える．

高温領域：伝導帯の電子と価電子帯の正孔はほとんど価電子帯から伝導帯への熱励起で生じ，それらの密度はドナー密度N_Dを上回るとすると，$N_\mathrm{D} \ll \sqrt{np}$と近似して，式(5)より，$n =$［　⑩　］となる．この温度領域を［　㋗（真性・飽和（出払い）・不純物（凍結））　］領域とよぶ．

中間領域：少し温度が下がると，価電子帯からの電子の熱励起は減り，ドナー準位からの電子の励起が支配的になる．そこで$N_\mathrm{D} \gg \sqrt{np}$と近似すると，式(5)より$n =$［　⑪　］となる．この温度領域を［　㋘（真性・飽和（出払い）・不純物（凍結））　］領域とよぶ．

一方，$k_\mathrm{B}T \ll \varepsilon_\mathrm{c} - \varepsilon_\mathrm{D}$をみたす温度領域（“低温領域”）では，ほとんどのドナー準位を電子が占有し，式(5)は成り立たなくなる．そこで価電子帯からの電子の励起はほとんどないとして，式(4)においてpを無視する．次に$f_\mathrm{D}\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right) = \left\{1 + A\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right)\right\}^{-1}$の形を仮定すると，式(4)から，$n/\left(N_\mathrm{D} - n\right)$は$A\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right)$を使って，

$$\frac{n}{N_\mathrm{D} - n} = [\quad ⑫ \quad] \tag{6}$$

と表される．次に$f_\mathrm{D}\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right)$として縮重因子を考慮したフェルミ・ディラック分布を用い，$A\left(\varepsilon_\mathrm{D}\right) = \dfrac{1}{2}\exp\left\{\left(\varepsilon_\mathrm{D} - \varepsilon_\mathrm{F}\right)/k_\mathrm{B}T\right\}$とする．さらに式(6)の左辺と右辺に式(1)の左辺と右辺をそれぞれかけることで，$n^2/\left(N_\mathrm{D} - n\right)$は$N_\mathrm{c}$，$\varepsilon_\mathrm{D}$，$\varepsilon_\mathrm{c}$，$k_\mathrm{B}$，$T$を使うと，

$$\frac{n^2}{N_\mathrm{D} - n} = [\quad ⑬ \quad] \tag{7}$$

と表される．この低温領域では$N_\mathrm{D} \gg n$であるので，nとε_FはN_c，N_D，ε_D，ε_c，k_B，Tを使って，

$$n = [\quad ⑭ \quad] \tag{8}$$

$$\varepsilon_\mathrm{F} = [\quad ⑮ \quad] \tag{9}$$

となる．この温度領域を［　㋙（真性・飽和（出払い）・不純物（凍結））　］領域とよぶ．

問1　文章中の空欄［　ア　］～［　コ　］にあてはまる語句を答えよ．ただし，空欄［　オ　］および［　ク　］～［　コ　］は適切な語句を一つ選ぶこと．

問2　文章中の空欄［　①　］～［　⑮　］にあてはまる数式や関係式を答えよ．

問3　文章中の下線 1 に関して，面心立方格子（実空間）の第一ブリルアン領域を図 2-1 の(a)～(d)の中から選べ．

問4　文章中の下線 2 のように区別される半導体の 2 つの種類の名前を答え，それぞれの特徴が分かるようにそれらのバンド構造（縦軸：エネルギー，横軸：波数）の概略図を描け．

問5　図 2-2 を解答用紙に転記し，文章中で議論した n 型半導体の電子密度 n の温度依存性を $\ln(n)-1/T$ グラフで示せ．このとき，高温領域，中間領域，低温領域での傾きの違いが分かるように示せ．

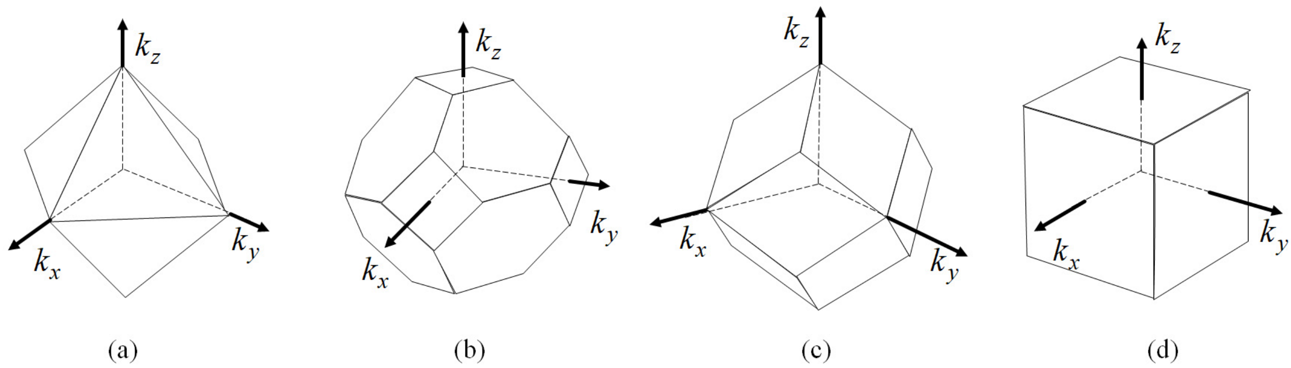

図 2-1

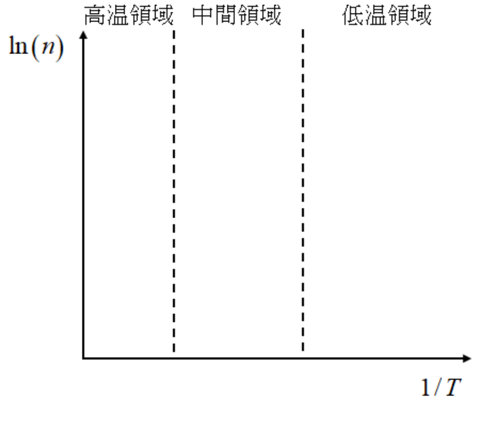

図 2-2

量子電子物性2　単語の英訳

半導体：	semiconductor
結晶構造：	crystal structure
面心立方格子：	face-centered cubic lattice
逆格子：	reciprocal lattice
境界：	boundary
第一ブリルアン領域：	first Brillouin zone
価電子：	valence electron
混成軌道：	hybridized orbital
伝導帯：	conduction band
バンド構造：	band structure
上端/下端：	top/bottom
光学遷移：	optical transition
キャリア密度：	carrier density
不純物：	impurity
真性半導体：	intrinsic semiconductor
フェルミエネルギー：	Fermi energy
ボルツマン分布：	Boltzmann distribution
正孔：	hole
ドナー：	donor
ｎ型半導体：	n-type semiconductor
アクセプタ：	acceptor
補償：	compensation
占有：	occupation
イオン化：	ionization
ドナー準位：	donor level
電荷中性条件：	charge neutrality condition
励起：	excitation
高温領域：	high-temperature region
中間領域：	intermediate region
熱励起：	thermal excitation
飽和：	saturation
出払い：	exhaustion
凍結：	freeze-out
低温領域：	low-temperature region
縮重因子：	degeneracy factor
フェルミ・ディラック分布：	Fermi-Dirac distribution

【量子電子物性3】 解答は，灰色（5番）の解答用紙に記入すること．

磁性に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，真空の透磁率を μ_0，ボルツマン定数を k_B とする．

まず孤立した原子（イオン）によってつくられる磁気モーメントについて考える．原子の電子軌道は主量子数 n，方位量子数 l，磁気量子数 m_z 及びスピン量子数 m_s によってその占め方が規定される．また電子は［　㋐　］粒子であるので，［　㋑　］に従って，同じ量子状態（n，l，m_z，m_s）をもつ電子が［　①　］個以上存在しない．n と l が指定された場合，スピン状態を含めて［　②　］個までの電子配置が考えられ，原子（イオン）の基底状態での電子軌道の m_z と m_s の占有状態は，［　㋒　］によって指定される．

次に，原子（イオン）が集合してできている物質について考える．磁気モーメントが磁界により配向し磁化が発生する物質の中で，正の磁化率をもつ物質は常磁性体と呼ばれる．軌道角運動量量子数 L が 0 でスピン角運動量量子数 S が $1/2$ である原子だけからなり，それが単位体積当たり N 個含まれる常磁性体に，静磁界を印加したときの磁化を考える．量子論では磁気モーメントの磁界方向成分は不連続な値をとり，磁界中で $S=1/2$ の状態は，スピンが外部磁界に平行な $m_s=$［　③　］と反平行な $m_s=$［　④　］の 2 つのエネルギー状態に分裂する．磁束密度の大きさ B の静磁界印加時のこの 2 つの状態のエネルギー差 $\Delta\varepsilon\,(>0)$ は，g 因子を g_S，ボーア磁子を μ_B として用いると，

$$\Delta\varepsilon = [\quad ⑤ \quad] \tag{1}$$

となり，この磁束密度で生じるエネルギー準位の分裂を［　㋓　］という．

高いエネルギーの状態と低いエネルギーの状態にある原子の単位体積当たりの数をそれぞれ N_1 と N_2 とすると，絶対温度 T における熱平衡状態では，2 つの状態の占有率の比はボルツマン分布則により，$\Delta\varepsilon$ を用いて

$$N_1/N_2 = \exp(-[\quad ⑥ \quad]) \tag{2}$$

と与えられる．磁界方向の磁化 M は N_1，N_2，g_S，μ_B を用いて

$$M = [\quad ⑦ \quad] \tag{3}$$

と表される．全原子の単位体積当たりの数は $N=N_1+N_2$ であり，N_1/N と N_2/N を求めることで，

$$M = [\quad ⑧ \quad] \times \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)} = [\quad ⑧ \quad] \times \tanh x \tag{4}$$

$$x = [\quad ⑨ \quad] \tag{5}$$

となる．$x \ll 1$ のときには $\tanh x \simeq x$ であり，磁化率 χ_m は

$$\chi_m = [\quad ⑩ \quad] \tag{6}$$

で近似される．式(6)に従う磁化率の法則を［　　㋔　　］という．

一般には 1 つの原子（イオン）に含まれる複数個の電子による全角運動量量子数が J である常磁性体を磁界中におくと，そのエネルギー準位は［　　⑪　　］個の状態に［　　㋓　　］する．磁束密度の大きさ B の静磁界印加時において，磁気モーメントのポテンシャルエネルギー ε は，ランデの g 因子を g_J として用いると

$$\varepsilon = m_J \times [\quad ⑫ \quad] \tag{7}$$

と表される．ただし，m_J は $m_J = J, J-1, \cdots, -J+1, -J$ である．この場合も上述と同様な計算により，磁界が小さいとき，一般の J に対して求めた磁化率についても［　　㋔　　］が成り立つ．常磁性体物質のモル当たりの磁化率の温度依存性を測定すれば，実験的に有効ボーア磁子数 p が求まる．[下線 1]Sm^{3+} や Eu^{3+} などの例外を除き，4f 電子が磁性を担っている希土類元素を含む物質の有効ボーア磁子数 p の実測値は，［　　㋒　　］から求められる p の理論値 $p = g_J\sqrt{J(J+1)}$ とよく一致することが知られている．ただし，g_J は軌道角運動量量子数 L，スピン角運動量量子数 S，全角運動量量子数 J を用いて

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \tag{8}$$

から計算できる．

一方，金属中にはスピンを有する多数の伝導電子が存在するが，常磁性を示す金属の磁化率は［　　㋔　　］とは異なる温度依存性を示す．[下線 2]このような金属の磁気的性質はパウリ常磁性と呼ばれる．

また，反磁性を示す物質は，[下線 3]希ガス原子や，磁性原子を含まないイオン結晶の他に，共有結合物質や半金属がある．一般に反磁性体の磁化率は小さく，その温度変化は常磁性絶縁体と比べて［　㋕（大きい・小さい）　］．

問1　文章中の空欄［　㋐　］～［　㋕　］にあてはまる語句を答えよ．ただし，空欄［　㋕　］は適切な語句を一つ選ぶこと．

問2　文章中の空欄［　①　］～［　⑫　］にあてはまる数式または数値を答えよ．

問3　文章中の下線 1 について考える．

(1) 硫化ガドリニウムの有効ボーア磁子数 p の実測値は理論値とよく一致する．［　㋒　］を適用して，Gd^{3+}イオン（$4f^7$）の基底状態での J の値を答えよ．また p の値を有効数字 1 桁で求めよ．

(2) 3d 電子が磁性を担っている鉄族イオンからなるクロムカリミョウバン（$CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$）での Cr^{3+}イオン($3d^3$)の有効ボーア磁子数 p の実測値は 3.7 である．この実測値は $p = g_J\sqrt{J(J+1)}$ で計算される値と一致せず，スピン角運動量のみを考慮することで説明できる．この現象を何と呼ぶか答えよ．

問4　文章中の下線 2 について考える．一般にパウリ常磁性による磁化率は，ほとんどの温度領域において常磁性絶縁体で観測される［　㋔　］に従う常磁性磁化率より小さい．この理由を簡潔に答えよ．

問5　(1) 下記に示した物質の中から室温で常磁性を示す物質をすべて選び，その磁化率の温度依存性として適切に表しているグラフをそれぞれ図 3-1 の（あ）～（お）の中から選び，その記号で答えよ．

(2) 下記に示した物質の中から室温で反磁性を示す物質をすべて答えよ．また文章中の下線 3 の物質が反磁性を示す理由を電子構造の観点から簡潔に答えよ．

［ Ar，Bi，Co，Fe，Ge，KCl，NO，Pt ］

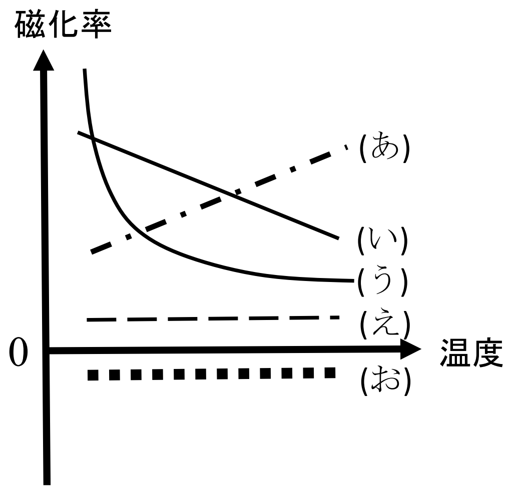

図 3-1

量子電子物性3　単語の英訳

磁性：	magnetism
透磁率：	magnetic permeability
ボルツマン定数：	Boltzmann constant
磁気モーメント：	magnetic moment
量子数：	quantum number
電子配置：	electron configuration
基底状態：	ground state
磁界：	magnetic field
磁化：	magnetization
磁化率：	susceptibility
常磁性体：	paramagnetic substance
軌道角運動量：	orbital angular momentum
スピン角運動量：	spin angular momentum
磁束密度：	magnetic flux density
g 因子：	g-factor
ボーア磁子：	Bohr magneton
ボルツマン分布則：	Boltzmann distribution law
全角運動量：	total angular momentum
ランデ：	Landé
伝導電子：	conduction electron
パウリ：	Pauli
反磁性：	diamagnetism

【量子電子物性4】 解答は，青色(6番)の解答用紙に記入すること.

半導体デバイスに関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，素電荷をe，半導体の誘電率をκ_sとする．

図 4-1(a)に示すような，金属（ゲート）電極と p 型半導体との間に絶縁膜（酸化膜）が挟まれた MOS 構造に，ソース・ドレイン電極を設けた MOS 型電界効果トランジスタ（MOSFET）を考える．ソースおよびドレイン領域は高濃度に不純物添加された n 型半導体になっている．この MOSFET の動作を理解するため，まず，ソース・ドレイン間に電圧を印加せず，p 型半導体側を接地した状態でゲート電極に電圧V_Gを印加した場合を考える．ただし，MOS 構造の酸化膜中の電荷，酸化膜－p 型半導体界面の界面準位の影響は無視し，酸化膜の抵抗は無限大とする．また，[下線1]<u>MOS 構造の p 型半導体と金属の仕事関数の差はないものとする</u>．図 4-1(b)は，この MOS 構造のゲート電極に正の電圧（$V_G > 0$）が印加されているときの金属，酸化膜，p 型半導体のエネルギーバンド図を示している．酸化膜－p 型半導体界面を原点（$x = 0$）とし，p 型半導体が$x \geq 0$にあるものとする．ε_i，ε_c，ε_vはそれぞれ半導体の真性フェルミ準位，伝導帯下端のエネルギー，価電子帯上端のエネルギー，ε_{FS}，ε_{FM}はそれぞれ p 型半導体と金属のフェルミ準位を表す．$e\phi_B$はxが十分に大きい点でのε_iとε_{FS}のエネルギー差（$e\phi_B = \varepsilon_i - \varepsilon_{FS}$）である．

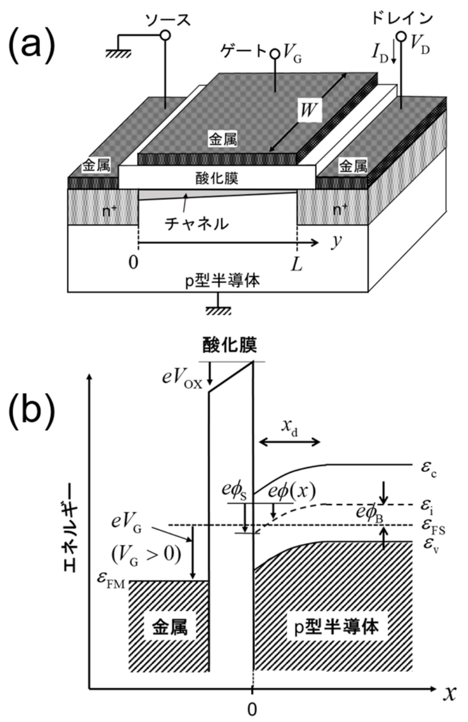

図 4-1

[下線2]<u>ゲート電極に負の電圧（$V_G < 0$）を印加すると，半導体の界面付近のバンドが上方向に曲げられ，界面付近に［　㋐（電子・正孔）　］が引き寄せられ蓄積層が形成される（蓄積状態）</u>．ゲート電極に正の電圧（$V_G > 0$）を印加すると，図 4-1(b)に示すように半導体の界面付近のバンドは下方向に曲げられる．このとき，キャリアが存在しない空乏層が界面付近に形成される（空乏状態）．さらにゲート電極に印加する正電圧を増加すると（$V_G \gg 0$），半導体のバンドの曲がりが大きくなり，界面付近に［　㋑（電子・正孔）　］が誘起され反転層が形成される（反転状態）．このような MOS 構造を［　㋒（n チャネル・p チャネル）　］型とよぶ．

酸化膜に接する半導体のバンド曲がりは半導体の界面付近の電荷密度の分布によって決まる．半導体内部の電位$\phi(x)$をxが十分に大きい点での真性フェルミ準位ε_iを基準にし，図 4-1(b)のように下向きに

正に測る．$\phi(x)$ は半導体中の電荷密度 $\rho_s(x)$ と κ_s を用いて次のポアソンの方程式で表される．

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = [\quad ① \quad] \tag{1}$$

はじめに，ゲート電極に $V_G > 0$ が印加され，MOS 構造が空乏状態にある場合を考える．空乏層内にはキャリアが存在せず，p 型半導体中のアクセプタは濃度 N_A で一様に分布し，かつすべてイオン化しているものとする．空乏層幅を x_d，$d\phi(x)/dx\big|_{x=x_d} = 0$，$\phi(x_d) = 0$ とすると，式(1)の微分方程式を解くことにより，

$$\phi(x) = [\quad ② \quad]\ (0 \le x \le x_d),\qquad \phi(x) = 0\ \ (x_d < x) \tag{2}$$

が得られる．$x = 0$ における電位 $\phi(0)$ を ϕ_s と定義すると，x_d は ϕ_s の関数として

$$x_d = [\quad ③ \quad] \tag{3}$$

と表される．ここで，酸化膜にかかる電圧を V_{OX} とすると，V_G は V_{OX} と ϕ_s を用いて，

$$V_G = V_{OX} + \phi_s \tag{4}$$

のように与えられる．

この状態からさらに正方向に V_G を増加し $\phi_s > \phi_B$ になると，反転状態になり反転層に［　㋑　］が誘起されはじめるが，$\phi_B < \phi_s < 2\phi_B$ では誘起される［　㋑　］密度は小さい（弱い反転状態）．このとき，近似的に式(2)，(3)が成り立つとすると，x_d は式(3)にしたがい ϕ_s とともに増加する．

引き続き V_G を増加し，$\phi_s = 2\phi_B$ になったとき，界面近傍の［　㋑　］密度は N_A と等しくなる．このときの x_d の値を x_{dmax} とすると，$\phi_s > 2\phi_B$ となっても x_d は x_{dmax} のまま一定となり，$2\phi_B$ をこえた分の ϕ_s はすべて反転層の［　㋑　］密度の増加に寄与する（強い反転状態）．この $\phi_s = 2\phi_B$ となる V_G の値をしきい電圧 V_T とする．$V_G \ge V_T$ では空乏層内に存在するアクセプタの単位面積当たりの電荷量 Q_B は一定となるが，x_{dmax} は $V_G = V_T$ のときの x_d の値であることを考慮すると，ϕ_B を用いて

$$Q_B = [\quad ④ \quad] \tag{5}$$

と表される．一方，反転層に誘起される［　㋑　］による単位面積当たりの電荷量 Q_I と，Q_B 及び金属側に誘起される単位面積当たりの電荷量 Q_M の間には次の関係が成り立つ．

$$Q_I + Q_B + Q_M = 0 \tag{6}$$

酸化膜の単位面積当たりの静電容量を C_{OX} とすると，Q_M は C_{OX} を用いて

$$Q_M = [\quad ⑤ \quad] \tag{7}$$

として与えられる．$V_G = V_T$ のとき $Q_I = 0$ とすると，式(4)，(5)，(6)，(7)から V_T は ϕ_B を用いて次のように表される．

$$V_T = [\quad ⑥ \quad] \tag{8}$$

また，$V_G > V_T$ においても $\phi_s \simeq 2\phi_B$ が成り立つとすると，$V_G \ge V_T$ において，Q_I は V_T を用いて

$$Q_I = [\quad ⑦ \quad] \tag{9}$$

と表される．

次に，ゲート電極に$V_G > V_T$の電圧が印加された強い反転状態で，ソース電極を接地し，ドレイン電極に正の電圧V_Dを印加したときに流れるドレイン電流I_Dを考える．ここでは，I_DとV_Dの関係をV_Dの大きさによって以下の 3 つの場合に分けて考える．

(i)V_Dが十分小さいとき，Q_Iとソース・ドレイン方向の電界E_yはソース・ドレイン方向に一様とみなせる．したがってE_yはチャネル長Lを用いて，$E_y = -V_D/L$と表される．チャネル部を流れる［　　㋑　　］の移動度をμ，ゲート幅をWとすると，I_DはQ_Iを用いて

$$I_D = （［\quad ⑧ \quad］）\times V_D \tag{10}$$

となり，V_Dに比例する．

(ii)V_Dが大きくなると，次第にQ_IやE_yがソース・ドレイン方向に一様とみなせなくなるため，ソース・ドレイン方向に沿った解析が必要になる．ここでは，ソース・ドレイン方向の電位変化が小さく，空乏層幅がドレイン電圧の影響を受けずx_{dmax}のまま一定と仮定する．図 4-1(a)に示すようにソース端の位置を$y = 0$，ドレイン端の位置を$y = L$とし，ドレイン電圧によるチャネル上の任意の位置yにおける電位を$V(y)$とする．このとき，位置yにおけるQ_Iを$Q_I(y)$とすると，$Q_I(y)$は$V(y)$，V_G，V_Tを用いて

$$Q_I(y) = -C_{OX} \times （［\quad ⑨ \quad］） \tag{11}$$

で表される．したがって位置yにおけるドレイン電流は

$$I_D = -W\mu Q_I(y)\frac{dV(y)}{dy} \tag{12}$$

となる．ここでI_Dはyの関数となっているが，電流連続の条件が成り立つときI_Dは任意のyで一定であることを考慮すると，式(12)の両辺を$y = 0$から$y = L$まで積分することによってI_DとV_Dの関係式

$$I_D = \frac{W}{L}\mu C_{OX} \times （［\quad ⑩ \quad］） \tag{13}$$

を得る．ここで，$V(0) = 0$，$V(L) = V_D$を用いた．

I_Dは式(13)にしたがい$V_D =$［　　⑪　　］において極大値をとる．このとき，ドレイン端におけるQ_Iは0となり，ドレイン近傍のチャネルが消滅する．これを［　　㊇　　］という．

(iii)さらにドレイン電圧を増やして$V_D >$［　　⑪　　］となると，I_Dは次のようなV_Dに依存しない一定の値になる．

$$I_D = \frac{W}{2L}\mu C_{OX} \times （［\quad ⑫ \quad］） \tag{14}$$

式(14)の関係が成り立つ領域を飽和領域とよぶ．

一般に，MOSFET は$V_G = 0$でドレイン電流が流れるか否かによって分類される．$V_G = 0$でドレイン電

流が流れないものを［　　㋔　　］型とよぶ．一方，$V_{\mathrm{G}}=0$ でドレイン電流が流れるものを［　　㋕　　］型とよぶ．

問1　文章中の空欄［　　㋐　　］～［　　㋕　　］にあてはまる語句を答えよ．ただし空欄［　　㋐　　］～［　　㋒　　］は適切な語句を一つ選ぶこと．

問2　文章中の空欄［　　①　　］～［　　⑫　　］にあてはまる数式を答えよ．

問3　文章中の下線 1 について，もしゲート金属の仕事関数が p 型半導体の仕事関数よりも小さい場合，しきい電圧 V_{T} は文章中の式(8)と比べてどうなるか，その理由も含めて 100 字程度で答えよ．

問4　文章中の下線 2 について，蓄積状態のとき，半導体の界面付近には多数のキャリアが存在するにもかかわらず，ドレイン電圧を印加しても電流はほとんど流れない．その理由を 100 字程度で答えよ．

問5　図 4-2 のグラフを解答用紙に転記して，図 4-1 に示した MOSFET の飽和領域における $I_{\mathrm{D}}-V_{\mathrm{G}}$ 特性の概形を描け．この際，図中に V_{T} の位置を明示せよ．ただし，弱い反転状態において誘起される［　　㋑　　］による電流は極めて小さく無視できるものとする．

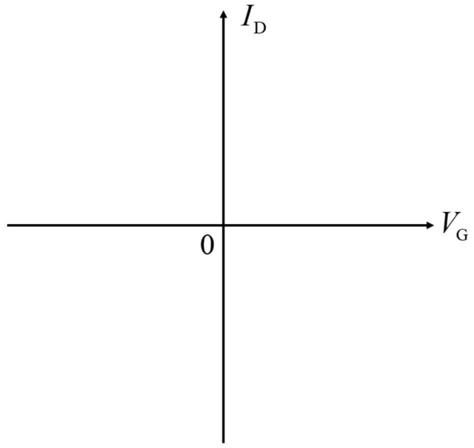

図 4-2

量子電子物性4　単語の英訳

電荷：	charge
誘電率：	permittivity
絶縁膜：	insulation layer
酸化膜：	oxide layer
電界効果トランジスタ：	field effect transistor
不純物添加された：	impurity-doped
接地：	ground
界面準位：	interface states
抵抗：	resistance
仕事関数：	work function
真性フェルミ準位：	intrinsic Fermi level
伝導帯下端：	bottom of conduction band
価電子帯上端：	top of valence band
蓄積：	accumulation
空乏：	depletion
反転：	inversion
ポアソンの方程式：	Poisson’s equation
アクセプタ：	acceptor
しきい電圧：	threshold voltage
電界：	electric field
移動度：	mobility
電流連続：	current continuity
飽和領域：	saturation region

【信号処理】解答は，だいだい色の解答用紙に記入すること．

1. 線形かつ時不変な離散時間信号処理システム L_1，L_2 を図 1 のように縦続接続する場合を考える．縦続接続したシステム全体を L_3 とし，L_1，L_2，L_3 のインパルス応答をそれぞれ $h_1[n]$，$h_2[n]$，$h_3[n]$ とする．ただし，n は離散的な時刻を表す整数である．以下の問いに答えよ．

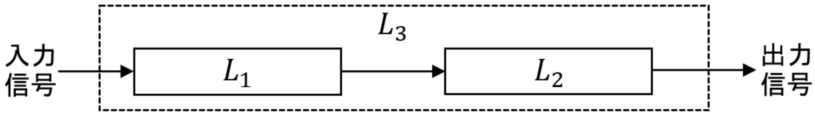

図 1: 線形時不変システムの縦続接続

(i) 一般に，離散時間における線形時不変システムが有界入力有界出力安定であるための必要十分条件を，インパルス応答 $h[n]$ を用いて答えよ．

(ii) $h_3[n]$ は $h_1[n]$ および $h_2[n]$ を用いてどのように表されるか．数式により示せ．

(iii) $h_1[n]$，$h_2[n]$ がともに問い (i) の条件を満たすとき，$h_3[n]$ もまた問い (i) の条件を満たすことを示せ．

(iv) L_1，L_2 がそれぞれ入出力差分方程式 $y[n] = x[n] - x[n-1]$ および $y[n] = x[n] + x[n-1] - y[n-2]$ により表されるとする．ただし $x[n]$，$y[n]$ は各システムに対する入力信号および出力信号を表す．L_3 の z 変換により定義される伝達関数を $H_3(z)$ とするとき，$H_3(z)$ を求め，さらに，その結果を基に L_3 の振幅特性および位相特性を求めよ．

2. 時刻を t 秒としたとき，地点 A から以下の信号 $x(t)$ を発する．

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leqq t \leqq 1) \\ 0 & (1 < t) \end{cases}$$

この信号は地点 A から別の地点 B まで以下のインパルス応答 $y(t)$ により伝播するものとする．

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 10) \\ 6 - 0.5t & (10 \leqq t \leqq 12) \\ 0 & (12 < t) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

(i) 地点 A で発した $x(t)$ の立ち上がり部分が地点 B に初めて伝わる時刻を答えよ．

(ii) 地点 B において観測される信号 $z(t)$ を，$x(t)$ と $y(t)$ を用いた畳込み積分式で表せ．

(iii) 信号 $z(t)$ の振幅が最大になる時刻を理由と共に述べよ．

(iv) 問い (ii) の畳込み積分を計算し，信号 $z(t)$ を時刻 t の多項式で表せ．

専門用語の英訳	
線形	linear
時不変	time-invariant
離散時間信号処理システム	discrete-time signal processing system
縦続接続	cascade connection
インパルス応答	impulse response
線形時不変システム	linear and time-invariant (LTI) system
有界入力有界出力安定	bounded-input bounded-output stable
入出力差分方程式	input-output difference equation
入力信号	input signal
出力信号	output signal
z 変換	z transform
伝達関数	transfer function
振幅特性	amplitude response
位相特性	phase response
畳込み積分	convolution
多項式	polynomial