2020 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科
電気電子情報工学専攻

専門科目試験問題
（電子工学コース）

（実施時間　１４：００ ～ １６：００）

【注　意　事　項】

１．問題用紙は，この表紙や白紙を除いて２０ページある．解答開始の指示があるまで開いてはいけない．解答開始後，落丁や不鮮明な箇所等があった場合は，手を挙げて監督者にその旨を伝えること．

２．試験問題は，「量子電子物性１」，「量子電子物性２」，「量子電子物性３」，「量子電子物性４」，「制御工学」，及び，「信号処理」，の全部で６題あり，この順番に綴じられている．このうち，３題を選択し解答すること．

３．解答開始前に，別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと．

４．問題用紙は持ち帰ってもよい．

【量子電子物性1】 解答は，桃色（1番）の解答用紙に記入すること.

量子力学に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，プランク定数 h を 2π で割った値を $\hbar$，虚数単位を i とする．

3 辺の長さが a，b，c である直方体の箱の中に閉じ込められた一つの量子力学的自由粒子（質量：m）の状態を，図 1-1 に示した直交座標 (x, y, z) で考える．ここで，箱の外のポテンシャルは無限大とする．箱の中については，粒子に力は作用していないので，式(1)に示す時間に依存しないシュレーディンガー方程式に従うとして解くことができる．

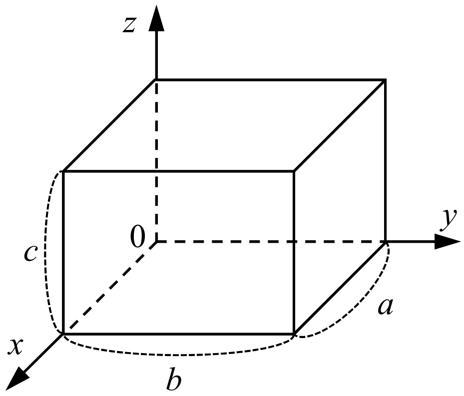

図 1-1

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi(x,y,z) \equiv H\varphi(x,y,z) = \varepsilon\varphi(x,y,z) \qquad (1)$$

ここで，$\varphi(x,y,z)$ と ε は，それぞれ，この方程式の固有関数と固有値である．また，

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \qquad (2)$$

とおいた．一般にハミルトニアンと呼ばれるこの H は［　㋐　］を表す演算子である．いま，H は x，y，z だけに関係した項の和となっていることから，その固有関数 $\varphi(x,y,z)$ は

$$\varphi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \qquad (3)$$

の形に書き表すことができる．式(3)を式(1)に代入して両辺の各項を関数 $X(x)Y(y)Z(z)$ で割り，左辺についてはそれぞれ x，y，z のみを含む項の和として整理すると，

$$［\quad ① \quad］= -\frac{2m}{\hbar^2}\varepsilon \qquad (4)$$

と変数分離できる．式(4)の右辺は定数であること，また，x，y，z は互いに独立な変数であることから，左辺の変数分離したいずれの項もそれぞれが定数でなければならない．いま，x のみを含む項について考え，その定数を $-k_x^2$（k_x は実数）とおくと，

$$［\quad ② \quad］= -k_x^2 \qquad (5)$$

が得られる．$\varphi(x,y,z)$ の満たすべき境界条件を考慮すると，$X(x)$ については

$$X(0) = X(a) = ［\quad ③ \quad］ \qquad (6)$$

が要求される．式(5)の微分方程式の一般解の中で物理的に意味をもつ解の一つは，A と B を負ではない任意定数として，

$$X(x) = A\sin k_x x + B\cos k_x x \tag{7}$$

と書き表される．式(5)に対する境界条件と規格化条件から

$$A = [\quad ④ \quad] \tag{8}$$

$$B = [\quad ⑤ \quad] \tag{9}$$

$$k_x = [\quad ⑥ \quad] \times n_x \tag{10}$$

が得られる．ここで，n_xは正の整数である．

$Y(y)$，$Z(z)$についても同様にして解くことができ，式(10)のn_xに対応する正の整数を，それぞれn_y，n_zとおくと，固有関数，固有値として

$$\varphi(x, y, z) = [\quad ⑦ \quad] \tag{11}$$

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = [\quad ⑧ \quad] \tag{12}$$

が得られる．n_x，n_y，n_zは正の整数であるから，式(12)のεの値は離散的となる．このように，離散的な固有状態に番号付けをするn_x，n_y，n_zのような数は［　㋑　］数と呼ばれる．εが最小となるのは，$n_x = n_y = n_z =$［　⑨　］の場合であり，正の有限の値をとることが分かる．このことは，箱の中に閉じ込められた量子力学的自由粒子は，エネルギーが最低の基底状態でも有限の運動エネルギーをもって動き回っていると解釈できることを表しており，このエネルギーを［　㋒　］エネルギーと呼ぶ．

問 1　文章中の空欄［　㋐　］～［　㋒　］にあてはまる語句を，空欄［　①　］～［　⑨　］にあてはまる数値または数式を答えよ．

問 2　$\varphi(x, y, z)$の満たすべき境界条件から，$X(x)$については式(6)が要求される．その物理的根拠を 40 字程度で答えよ．

問 3　$a = b = c$の場合について，励起状態の中で最もエネルギーの低い状態の組(n_x, n_y, n_z)をすべて答えよ．

問 4　基底状態の固有関数と固有値を，それぞれφ_1とε_1とおく．$H - \varepsilon_1$と$(H - \varepsilon_1)^2$の期待値$\langle H - \varepsilon_1 \rangle$，$\langle (H - \varepsilon_1)^2 \rangle$は，いずれも 0 であることを示せ．

問 5　基底状態にある粒子の運動量のx方向成分$p_x = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial x}$について，$p_x$と$p_x^2$の期待値がそれぞれ$\langle p_x \rangle = 0$，$\langle p_x^2 \rangle = (\hbar k_x)^2$となることを示せ．

問 6　問 4，5 の結果をもとに，箱の中に閉じ込められた量子力学的自由粒子の状態を，そのエネルギーと運動量の観点から説明せよ．

量子電子物性１　単語の英訳

量子力学：	quantum mechanics
プランク定数：	Planck constant
虚数単位：	imaginary unit
直方体：	rectangular parallelepiped, cuboid
箱：	box
自由粒子：	free particle
質量：	mass
直交座標：	orthogonal coordinates
無限大：	infinite
ポテンシャル：	potential
時間に依存しないシュレーディンガー方程式：	time-independent Schrödinger equation
固有関数：	eigenfunction
固有値：	eigenvalue
演算子：	operator
変数分離：	separation of variables
実数：	real number
境界条件：	boundary condition
微分方程式：	differential equation
一般解：	general solution
規格化：	normalization
整数：	integer
離散的：	discrete
有限：	finite
基底状態：	ground state
励起状態：	excited state
期待値：	expectation value
運動量：	momentum

【量子電子物性2】 解答は，緑色（2番）の解答用紙に記入すること.

次の半導体物性に関する文章を読んで，以下の問いに答えよ．なお，$\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割ったものである．

シリコン半導体の単結晶は［　㋐　］型構造をしており，各原子の最外殻電子は4個の最近接原子と［　㋑　］結合をしている．一つの原子に注目すると，まわりの8個の最外殻電子で閉殻構造を形成しており，これ以上の電子をつめることができない．この状態の電子は［　㋒　］帯を形成し，絶対零度では満ちたエネルギーバンドになっている．このとき，禁止帯をへだててその上に空の［　㋓　］帯が存在し，温度が上昇するにつれ，［　㋒　］帯から［　㋓　］帯に電子が励起され，電子は［　㋒　］帯の正孔とともに電気伝導に寄与する．このような場合には，電子と同数の正孔がつくられており，このような半導体を［　㋔　］半導体と呼ぶ.

［　㋔　］半導体に，禁止帯幅のエネルギー ε_{g} を超えるエネルギーを持つ光が入射すると，［　㋑　］結合を切って，電子と正孔がつくられる．[下線1]ある半導体では，［　㋓　］帯の底と［　㋒　］帯の頂上が同じ波数 k のところにあり，光を吸収すると電子と正孔がほぼ同じ波数のところに励起される．このような遷移過程を［　㋕　］遷移と呼ぶ．一方，［　㋓　］帯の底と［　㋒　］帯の頂上が同じ波数のところにはなく，光だけでは励起できずに，同時に［　㋖　］の吸収や放出をともなって，電子と正孔を励起する場合の遷移過程を［　㋗　］遷移とよぶ.

［　㋓　］帯の底のエネルギーを ε_{c} とし，電子の有効質量を m_{n}，［　㋒　］帯の頂上のエネルギーを ε_{v} とし，正孔の有効質量を m_{p} とすれば，波数 k の電子と正孔のエネルギー $\varepsilon_{\mathrm{n}}(k)$，$\varepsilon_{\mathrm{p}}(k)$ はそれぞれ，

$$\varepsilon_{\mathrm{n}}(k)=\varepsilon_{\mathrm{c}}+［\quad ①\quad ］, \qquad (1) \qquad\qquad \varepsilon_{\mathrm{p}}(k)=\varepsilon_{\mathrm{v}}-［\quad ②\quad ］ \qquad (2)$$

と書ける．ただしこれは，電子は［　㋓　］帯の底，正孔は［　㋒　］帯の頂上に近い部分のみの近似である.

金属の自由電子を考えたとき，エネルギー ε と $\varepsilon+d\varepsilon$ の間にある単位体積中の状態の数 $g(\varepsilon)d\varepsilon$ は，スピンを考慮して，

$$g(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon \qquad (3)$$

で与えられる．ここで，m は金属中の自由電子の有効質量である．一方，半導体では禁止帯があり，キャリアの有効質量が自由電子と異なるために，エネルギー ε と $\varepsilon+d\varepsilon$ の間にある単位体積中の電子の状態の数 $g_{\mathrm{n}}(\varepsilon)d\varepsilon$ と正孔の状態の数 $g_{\mathrm{p}}(\varepsilon)d\varepsilon$ は，ε，ε_{c}，ε_{v}，m_{n}，m_{p}，$\hbar$ を用いて，それぞれ，

$$g_{\mathrm{n}}(\varepsilon)d\varepsilon=［\quad ③\quad ］d\varepsilon, \ (4) \qquad g_{\mathrm{p}}(\varepsilon)d\varepsilon=［\quad ④\quad ］d\varepsilon \qquad (5)$$

と表すことができる．

電子および正孔は［　㋘　］の排他律にしたがい，エネルギー ε の状態を占める占有確率は，［　㋙　］分布関数で表される．そこで［　㋓　］帯の全電子密度 n と［　㋒　］帯の全正孔密度 p は，全エネルギー範囲で積分すれば求めることができる．電子の占有確率を $f_{\mathrm{n}}(\varepsilon)$，正孔の占有確率を $f_{\mathrm{p}}(\varepsilon)$ として，

$$n=\int_{\varepsilon_{\mathrm{c}}}^{\infty} g_{\mathrm{n}}(\varepsilon) f_{\mathrm{n}}(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon, \qquad (6) \qquad\qquad p=\int_{-\infty}^{\varepsilon_{\mathrm{v}}} g_{\mathrm{p}}(\varepsilon) f_{\mathrm{p}}(\varepsilon) d\varepsilon \qquad (7)$$

となる．ここで，$f_{\mathrm{n}}(\varepsilon)$ と $f_{\mathrm{p}}(\varepsilon)$ はフェルミ準位を ε_{F}，ボルツマン定数を k_{B}，温度を T として，

$$f_{\mathrm{n}}(\varepsilon)=\frac{1}{1+\exp\left((\varepsilon-\varepsilon_{\mathrm{F}})/k_{\mathrm{B}}T\right)}, \quad (8) \qquad\qquad f_{\mathrm{p}}(\varepsilon)=［\quad ⑤ \quad］ \qquad (9)$$

と記述できる．

室温近傍にある［　㋔　］半導体では ε_{F} は禁止帯中の中央付近にあるため，［　㋙　］分布関数は，［　㋚　］分布関数で近似できるので，

$$f_{\mathrm{n}}(\varepsilon) \approx ［\quad ⑥ \quad］, \qquad (10) \qquad\qquad f_{\mathrm{p}}(\varepsilon) \approx ［\quad ⑦ \quad］ \qquad (11)$$

と書ける．式(6)，(7)に［　㋚　］分布関数を代入して，

$$n=N_{\mathrm{c}}\exp\left(-［\quad ⑧ \quad］\right), \qquad (12) \qquad\qquad p=N_{\mathrm{v}}\exp\left(-［\quad ⑨ \quad］\right) \qquad (13)$$

と計算できる．[下線２]<u>ここで，N_{c}，N_{v} はそれぞれ，［　㋓　］帯および［　㋒　］帯の有効状態密度である</u>．

この結果より，n と p の積は禁止帯幅のエネルギー ε_{g} の関数として，

$$np=N_{\mathrm{c}}N_{\mathrm{v}} \times ［\quad ⑩ \quad］ \qquad (14)$$

と求められる．［　㋔　］半導体では，電気的中性条件から，$n=p$ であるので，

$$\varepsilon_{\mathrm{F}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{c}}+\varepsilon_{\mathrm{v}}}{2}+［\quad ⑪ \quad］ \qquad (15)$$

と求められる．

問１　文章中の空欄［　㋐　］～［　㋚　］にあてはまる最も適した語句を，下記の表から選べ．

ホッピング，フェルミ，ボース，スピン，ド・ブロイ，アインシュタイン，コーン，ボルツマン，間接，直接，真性，中性，アクセプター，ヘキサゴナル、ドナー，ダイヤモンド，ウルツ鉱，ペロブスカイト，イオン，ヘテロ，伝導，電荷，価電子，トンネル，パウリ，フォトン，フォノン，プロトン，ボーア，アボガドロ，磁性，共有，金属，ファンデルワールス

問 2　文章中の空欄［　①　］～［　⑪　］にあてはまる数式を答えよ.

問 3　文章中の［下線 1］について,［　㋕　］遷移型半導体と［　㋗　］遷移型半導体のエネルギーバンド構造（波数 k とエネルギー ε の関係）を図示せよ．ただし,［　㋓　］帯は最下位にある電子に対するバンド,［　㋒　］帯は最上位近傍にある有効質量の重い正孔と軽い正孔の 2 種類の正孔に対するバンドを図示し，どちらが軽い正孔と重い正孔に対応するバンドかについても記せ.

問 4　以下の(A),(B)の問いに答えよ．ただし，ε_{g} の温度依存性は無視するものとする.

(A)［　㋗　］遷移型半導体に対して，室温付近で，ε_{g} より少し大きいエネルギーの光を入射すると有限の吸収率（単位厚さ当たり）を示していたが, 低温に冷やすと, 吸収率が減少した. “低温に冷やすと，吸収率が減少したのは何故か？” 説明せよ.

(B) 上述の状態から，光の波長を短くしていくと，少しずつ吸収率が増大するが，ある波長以下で突然吸収率が大きくなった. “ある波長以下で突然吸収率が大きくなったのは何故か？”, 波長とエネルギーの関係と上記問 3 の［　㋗　］遷移型半導体のエネルギーバンド構造とあわせて説明せよ.

問 5　文章中の［下線 2］について，N_{c} および N_{v} を求めよ．ただし，次の公式を用いてよい。また，バレーの数は考慮しなくてよい.

$$\int_0^\infty \sqrt{x}\exp(-ax)\,dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

量子電子物性2　単語の英訳

プランク定数：	Planck constant
最外殻電子：	outermost electron
閉殻構造：	closed shell structure
禁止帯：	band gap
遷移過程：	transition process
有効質量：	effective mass
波数：	wave number
排他律：	exclusion principle
分布関数：	distribution function
占有確率：	occupancy probability
フェルミ準位：	Fermi level
有効状態密度：	effective density of states
電気的中性条件：	electrical neutrality condition
間接：	indirect
直接：	direct
真性：	intrinsic
中性：	neutral
ウルツ鉱：	wurtzite
伝導：	conduction
電荷：	charge
価電子：	valence electron
磁性：	magnetic
共有：	covalent
金属：	metal
吸収率：	absorption rate

【量子電子物性3】 解答は，灰色（3番）の解答用紙に記入すること．

誘電体に関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，真空の誘電率をε_0，素電荷をe，虚数単位をj，時間をtとする．

[I] 誘電体に電界を加えると，内部に分極が誘起される．分極はその発現機構からいくつかの種類に分類され，電荷のずれによって生じる変位分極には電子分極とイオン分極の 2 種類がある．

以下では，立方晶のイオン結晶内で生じるイオン分極を中心に考察する．いま，結晶格子は電荷$+Ze$，$-Ze$をもった 2 種類の正負イオン（質量M_+，M_-）からなっており，交流電界が作用して正負イオンがそれぞれ平衡位置から$\mathbf{u}_+$，$\mathbf{u}_-$だけ変位したとする．このイオン間に発生した相対変化により，イオン対に双極子モーメント

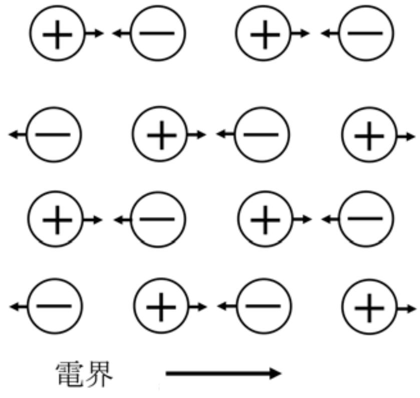

図 3-1

$$\boldsymbol{\mu}_\mathrm{i} = [\quad ① \quad] \tag{1}$$

が誘起される．隣接イオンが互いに反対方向に変位する振動様式は［　㋐　］分枝（あるいは［　㋐　］振動様式）と呼ばれる．変位したイオン対が結晶の単位体積中にN個あるとすると，イオン分極$\mathbf{P}_\mathrm{i}$は式(1)の右辺を用いて

$$\mathbf{P}_\mathrm{i} = [\quad ② \quad] \tag{2}$$

と表される．

次に図 3-1 に示す正負イオンを考え，時間tで変化する角周波数ωの交流電界$\mathbf{E}_\mathrm{loc}\exp(-j\omega t)$を局所電界としたときの運動方程式から，$\mathbf{E}_\mathrm{loc}$と平行な方向の変位量$(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)$を求める．ここでは，イオンの熱振動は無視できるとする．相対的変位が起こるとイオン間に復元力が働くが，簡単のためイオンは変位方向の隣接イオンのみと相互作用し，ばね定数k_0で連結されているものとする．すなわちイオン対には変位$(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)$に比例する復元力

$$2k_0(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) = M_\mathrm{r}\omega_\mathrm{r}^2(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) \tag{3}$$

が働くものとみなす．なお，M_rは還元質量$M_\mathrm{r} = M_+M_-/(M_+ + M_-)$を，$\omega_\mathrm{r}$は共振角周波数で$\omega_\mathrm{r} = \sqrt{2k_0/M_\mathrm{r}}$である．減衰の項を無視すると，運動方程式は

$$M_\mathrm{r}\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}_+ - \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u}_-\right) + 2k_0(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) = Ze\mathbf{E}_\mathrm{loc}\exp(-j\omega t) \tag{4}$$

と表されるとする．式(3)，(4)からその解は，M_{r} と ω_{r} を用いて

$$\mathbf{u}_{+} - \mathbf{u}_{-} = [\quad ③ \quad] \times \mathbf{E}_{\mathrm{loc}} \exp(-j\omega t) \tag{5}$$

となる．式(5)の右辺を用いると，イオン分極率 α_{i} は

$$\alpha_{\mathrm{i}} = [\quad ④ \quad] \tag{6}$$

と書ける．

一方，誘電体の巨視的物理量である比誘電率と，物質中の各構成要素に着目した微視的な分極率との関係式は［　㋑　］の式として知られている．イオンは原子核のまわりに電子をもっているため，分極にはイオン分極に加え，電子分極の寄与がある．そこで，正負イオンの電子分極率をそれぞれ α_{+}，α_{-} とすると，イオン分極，電子分極を考慮した［　㋑　］の式は，比誘電率を $\kappa(\omega)$ とし，α_{i} を用いて

$$\frac{\kappa(\omega)-1}{\kappa(\omega)+2} = [\quad ⑤ \quad] \tag{7}$$

となる．ただし，局所電界にはローレンツ電界が適用され，局所電界係数を 1 とする．次に，$\omega = 0$ のときの比誘電率を κ_0，$\omega >> \omega_{\mathrm{r}}$ なる角周波数に対する比誘電率を κ_{∞} として，比誘電率 $\kappa(\omega)$ を求めると

$$\kappa(\omega) = \kappa_{\infty} + \frac{\kappa_0 - \kappa_{\infty}}{1-\left(\omega/\omega_{\mathrm{T}}\right)^2} \quad , \tag{8}$$

$$\omega_{\mathrm{T}}{}^2 = \frac{\kappa_{\infty}+2}{\kappa_0+2}\omega_{\mathrm{r}}{}^2 \tag{9}$$

が得られる．これは，イオン結晶の比誘電率の分散を表す式である．

一般に，ω_{T} は［　㋒　］振動の角周波数と呼ばれる．$\kappa(\omega) = [\quad ⑥ \quad]$ となる角周波数 ω_{L} は，［　㋓　］振動の角周波数と呼ばれる．$\kappa(\omega_{\mathrm{L}}) = [\quad ⑥ \quad]$ の条件から，

$$\left(\frac{\omega_{\mathrm{L}}}{\omega_{\mathrm{T}}}\right)^2 = [\quad ⑦ \quad] \tag{10}$$

の関係が導かれる．この関係を［　㋔　］の式と呼ぶ．

角周波数 ω_{T} を中心に比誘電率（実数部）をプロットすると，図 3-2 となる．ここで，$\omega_{\mathrm{T}} < \omega < \omega_{\mathrm{L}}$ の領域で $\kappa(\omega)$ は［　㋕　正，ゼロ，負　］となるため，イオン結晶に対して入射するこの範囲の角周波数の電磁波は［　㋖　］される．なお，$\kappa_0 - \kappa_{\infty}$ は［　㋗　電子，イオン　］分極の寄与を表し，κ_{∞} は［　㋘　電子，イオン　］分極の寄与を表す．

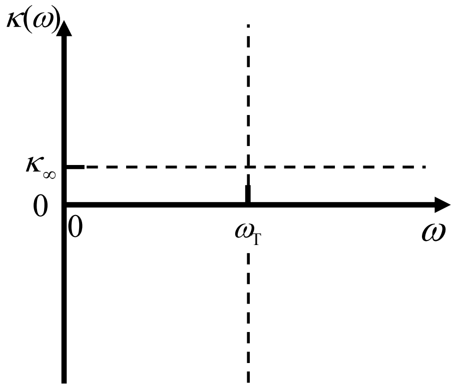

図 3-2

[Ⅱ] 強誘電体は内部に［　　㋵　　］分極を有し，電界印加によってその向きを変えることができる．[下線１]強誘電体に電界を加えた場合，誘起される分極を電界に対して図示すると，特徴的な閉曲線を示す．また，この物質の特徴としてキュリー温度で［　　㋵　　］分極を失い，［　　㋚　　］相に変化することが知られている．キュリー温度より数度低い［　　㋚　　］性キュリー温度（もしくは特性温度）と呼ばれる温度 T_0 より高温の温度 T において，［　　㋚　　］相の比誘電率 $\kappa(T)$ は，一般にキュリー定数 C を用いて

$$\kappa(T) = [\quad ⑧ \quad] \tag{11}$$

で近似的に表される．これをキュリー・ワイスの法則とよぶ．2 次相転移を示す強誘電体では，T_0 はキュリー温度と等しくなる．

　その他に，機械的な力を加えることで分極が変化する物質を特に［　　㋛　　］物質といい，水晶やチタン酸バリウムなどが知られている．

問 1　文章中の空欄［　　㋐　　］～［　　㋛　　］にあてはまる語句を答えよ．ただし，空欄［　　㋕　　］，［　　㋗　　］，［　　㋘　　］は適切な語句を一つ選ぶこと．

問 2　文章中の空欄［　　①　　］～［　　⑧　　］にあてはまる数式または数値を答えよ．

問 3　文章中に出てくる図 3-2 を解答用紙に転記し，横軸を角周波数 ω としたときの比誘電率 $\kappa(\omega)$ の角周波数依存性を示すグラフの概形を図示せよ．　ただし，κ_0 と ω_L もそれぞれ縦軸と横軸に記入すること．

問 4　文章中の [下線１] について考える．初期状態で分域の［　　㋵　　］分極の方向は強誘電体内部でランダムに分布し，全体として分極がないとする．図 3-3 を解答用紙に転記し，電界 E を $\pm E_1$ の間において $0 \to E_1 \to -E_1 \to E_1$ の順で掃引したときの分極 P と電界 E の関係を示す $P-E$ 曲線の様子をグラフに示し，閉曲線の特徴が分かるように概形を図示せよ．ただし，$\pm E_1$ を印加したとき強誘電体内部の全分極の方向は揃っているものとする．また，この現象について分極の変化の様子を簡潔に説明せよ．

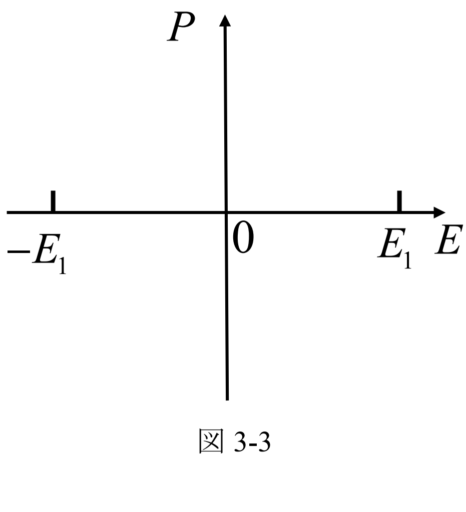

図 3-3

量子電子物性3　単語の英訳

誘電体：	dielectric
誘電率：	permittivity
素電荷：	elementary charge
虚数単位：	imaginary unit
電界：	electric field
分極：	polarization
電子分極：	electronic polarization
イオン分極：	ionic polarization
イオン結晶：	ionic crystal
交流電界	alternating electric field
平衡位置：	equilibrium position
双極子モーメント	dipole moment
角周波数：	angular frequency
局所電界：	local electric field
分極率：	polarizability
比誘電率：	relative permittivity
局所電界係数：	local electric field coefficient
強誘電体：	ferroelectric
2 次相転移：	second-order phase transition
機械的な力：	mechanical stress
分域：	domain

【量子電子物性4】 解答は，青色（4番）の解答用紙に記入すること．

半導体デバイスに関する次の文章を読み，下記の問いに答えよ．ただし，素電荷はq，プランク定数はh，真空の誘電率はε_0，半導体における電子密度はn，正孔密度はp，アクセプタ密度はN_{A}，ドナー密度はN_{D}，電子移動度はμ_{n}，正孔移動度はμ_{p}，電子の拡散係数はD_{n}，正孔の拡散係数はD_{p}，比誘電率はκによって表されるものとする．

[I] 半導体デバイスの動作はデバイス内部の静電界，電流密度，および連続の式を考えることで理解できる．まず，静電界について考えると，一般的に，電荷密度ρと電束密度$\mathbf{D}$はガウスの法則によって結び付けられる．ガウスの法則の微分形は以下の式により与えられる．

［　①　］ (1)

式(1)より，デバイス内部の電位ψに対して成立するポアソン方程式が求められる．以下では簡単のため，半導体デバイスはx軸を空間軸とする一次元問題としてモデル化できるものとする．ドーパントが全てイオン化した半導体中で具体的に存在し得る電荷を考慮すると，ポアソン方程式は以下の形として得られる．

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{q\left(N_{\mathrm{D}} - N_{\mathrm{A}} + p - n\right)}{\varepsilon_0\kappa} \tag{2}$$

次に，半導体デバイス中を流れる電流密度について考える．デバイスを流れる電流には，主な寄与として拡散とドリフトによるものがある．拡散電流はキャリア密度の勾配に起因し，その電流密度は拡散係数に依存する．一次元問題としてモデル化した半導体デバイスでは，電子および正孔に由来する拡散電流密度$J_{1\mathrm{n}}$，$J_{1\mathrm{p}}$は以下の式で与えられる．

$J_{1\mathrm{n}} =$ ［　②　］ (3)

$J_{1\mathrm{p}} =$ ［　③　］ (4)

一方，ドリフト電流はキャリアが電界によって輸送されることで生じる．印加された電界の大きさを$E(x)$とすると，電子および正孔に由来するドリフト電流密度$J_{2\mathrm{n}}$，$J_{2\mathrm{p}}$は以下の式で与えられる．

$J_{2\mathrm{n}} =$ ［　④　］ (5)

$J_{2\mathrm{p}} =$ ［　⑤　］ (6)

半導体デバイス中の全電流密度は上述の寄与分をすべて足し合わせることで与えられる．キャリア生成や再結合などの過渡的な現象が生じた際のキャリア数の変化は，考えている領域における電流連続の式に加え、電子正孔対の生成または再結合を考えれば求まる．単位時間および単位体積あたりの電子および正孔の生成数をそれぞれG_{n}，G_{p}，そして再結合数をそれぞれR_{n}，R_{p}とし，さらに，電流を表す式

(3), (4), (5), (6)を考慮すると，半導体デバイス中のキャリア数の時間的変化は 5 項の和として表される．すなわち，電子と正孔についてそれぞれ以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \text{［　⑥　］} \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \text{［　⑦　］} \tag{8}$$

[Ⅱ] 半導体光デバイスの一つとして p-n ホモ接合フォトダイオードを考え，生成される光電流 J_{tot} を解析する．一般的にフォトダイオードには逆バイアスが印加され，光照射により生成される電子正孔対が引き離されることで電流が生ずる．ここでは簡単のため，図 4-1 に示すように，光が p 型半導体側から入射し，x 軸方向に伝搬する一次元モデルを用いて解析する．なお，空乏領域を除く p 型半導体領域（p 型中性領域）は十分薄く，空乏領域に到達するまで半導体内部での光吸収は無視できることとし，半導体のバンドギャップエネルギー ε_{g}，および吸収係数 α はキャリア密度に依存しないとする．また，p 型半導体における空乏領域端を $x=0$ とする．

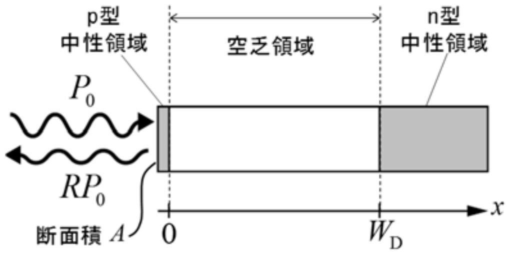

図 4-1

断面積 A のフォトダイオードに一様にパワー P_0，周波数 ν（$h\nu > \varepsilon_{\mathrm{g}}$）の光が照射される場合を考える．デバイス表面での反射率 R の影響を考慮すると，空乏領域に到達する単位時間および単位面積あたりの光子数 Φ_0 は［　⑧　］で与えられる．その後，空乏領域を伝搬するにつれ，光子数は吸収によって指数関数的に減衰する．一つの光子の吸収により 1 対の電子正孔対が生成されるとすると，空乏領域の位置 x における単位時間および単位体積あたりの電子正孔対生成数 $G_{\mathrm{e}}(x)$ は以下のように求まる．

$$G_{\mathrm{e}}(x) = \text{［　⑨　］} \tag{9}$$

簡単のため，[下線 1]<u>空乏領域で発生した電子正孔対の外部量子効率は 1 である</u>と仮定すると，発生する光電流 J_{dr} は，$G_{\mathrm{e}}(x)$ を空乏領域である $x=0 \sim W_{\mathrm{D}}$ の範囲で積分した値と素電荷の積で与えられる．

$$J_{\mathrm{dr}} = -q\int_0^{W_{\mathrm{D}}} G_{\mathrm{e}}(x)\,dx = \text{［　⑩　］} \tag{10}$$

実際のデバイスでは，上記の空乏領域以外に，n 型中性領域（$x > W_{\mathrm{D}}$）でも光吸収が生じ，電子正孔対が生成される．n 型中性領域における少数キャリア（正孔）の一部は空乏領域に進入し，光電流に寄与する．その結果，生じる全電流 J_{tot} は，n 型半導体における正孔の拡散長 L_{p} を用いて，近似的に以下の式で与えられる．

$$J_{\mathrm{tot}} \approx q\Phi_0 \left[1 - \frac{\exp(-\alpha W_{\mathrm{D}})}{1+\alpha L_{\mathrm{p}}} \right] \tag{11}$$

上式は，[下線２]<u>フォトダイオードから大きな光電流を得るための設計指針を与える</u>．

問 1　文章中の空欄［　①　］〜［　⑩　］に当てはまる数式または等式を答えよ．

問 2　半導体デバイスの具体的な解析例として，図 4-2 に示すような，接合面において電荷密度が不連続に変化する階段接合 p-n デバイスを考える．ここでは接合面を $x=0$ とし，空乏領域（$-x_{\mathrm{p}} \le x \le x_{\mathrm{n}}$）端に生じる電位差 ψ_{bi}（拡散電位）を求める．簡単のため，デバイスは一次元問題としてモデル化できるとし，ドーパントはすべてイオン化していること，また，半導体の比誘電率はドーパント密度によらず一定値 κ をもつことを仮定する．

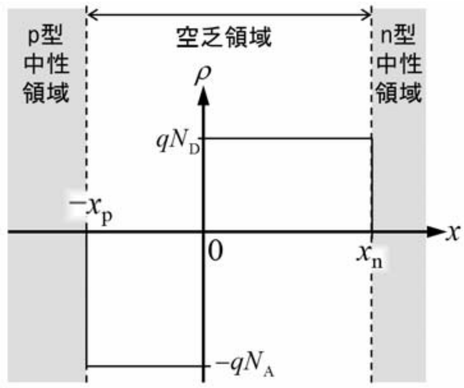

図 4-2

空乏領域において電気的中性条件が成り立つこと，また，空乏領域端において電界は 0 となることを利用すれば，ポアソン方程式より出発して ψ_{bi} が得られる．ψ_{bi} を求めよ．なお，解答には計算過程を示すこと．

問 3　文章中の［下線１］で示した仮定の具体的な内容を簡潔に述べよ．

問 4　文章中の［下線２］で示した，フォトダイオードから大きな光電流を得るために有効なデバイス設計上の工夫について，考えられるものを二つ挙げ，それぞれについて式(11)を参照しながら理由を述べよ．ただし，キャリアの拡散長，および空乏層幅は変わらないものとする．

問 5　フォトダイオードの吸収スペクトルは半導体のエネルギーバンド構造に依存するため，測定しようとする目的の波長帯によって適切な材料を選択する必要がある．図 4-3 に，可視〜近赤外波長域で利用可能な半導体材料である，Si, Ge, GaAs の吸収係数スペクトルを示す．図 4-3 に示した三つのトレースのうち，どれがどの半導体材料に対応するか答え，簡潔にその理由も述べよ．

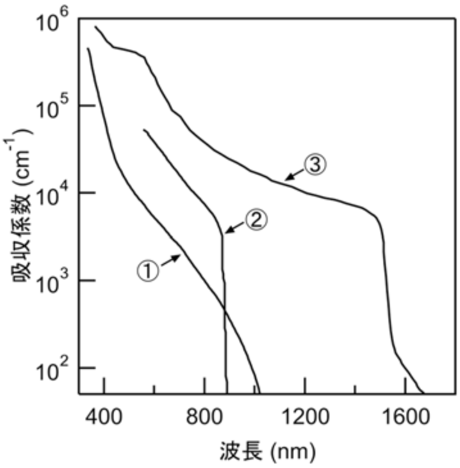

図 4-3

量子電子物性4　単語の英訳

素電荷：	elementary charge
プランク定数：	Planck constant
真空の誘電率：	vacuum permittivity
電子：	electron
正孔：	hole
密度：	density
移動度：	mobility
拡散係数：	diffusion constant
フェルミ準位：	Fermi level
比誘電率：	relative permittivity
静電界：	electrostatic field
電流密度：	current density
連続の式：	continuity equation
電荷密度：	electric charge density
電束密度：	electric flux density
ガウスの法則：	Gauss' law
電位：	electric potential
ポアソン方程式：	Poisson's equation
一次元問題：	one-dimensional problem
キャリア再結合：	carrier recombination
過渡的：	transient
p-n ホモ接合フォトダイオード：	homojunction p-n photodiode
電子正孔対：	electron-hole pair
空乏領域：	depletion region
中性領域：	neutral region
吸収係数：	absorption coefficient
外部量子効率：	external quantum efficiency
拡散長：	diffusion length
階段接合：	step-contact (abrupt) junction
拡散電位：	built-in potential
電気的中性条件：	electrical neutrality condition
可視～近赤外波長域：	visible – near infrared wavelength range

【制御工学】解答は，白色（５番）の解答用紙に記入すること．

以下の問 1，問 2 に答えよ．

問 1 伝達関数 $G(s)$ が次式で表される線形時不変システムについて，以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実数値をとるパラメータである．

$$G(s) = \frac{1000}{s^2 + as + 100}$$

(i) ステップ応答が単調増加となるための a に関する必要十分条件を求めよ．

(ii) $a = 16$ としたときのインパルス応答を時間 t の関数として表せ．

(iii) $a = 20$ としたときの $G(s)$ のボード線図におけるゲイン曲線の折れ線近似を考える．この折れ線近似において，角周波数の値が 10^2 となるときのゲインのデシベル値を求めよ．

(iv) $a = 20$ としたとき，$G(s)$ のベクトル軌跡が虚軸の負の領域と交差する点の座標を求めよ．

(v) $a = 10$ としたとき，ゲイン $|G(j\omega)|$ が最大値をとるときの角周波数 ω の値とゲイン $|G(j\omega)|$ の最大値をそれぞれ求めよ．ただし，j は虚数単位を表す．

問 2 次の状態方程式と出力方程式で与えられる 2 入力 1 出力の線形時不変システムについて，以下の問いに答えよ．

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$ は状態変数ベクトル，$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ は入力変数ベクトル，

$y(t)$ は出力変数であり，a は実数値をとるパラメータである．

(i) このシステムを表すブロック線図を図 1 に示す．

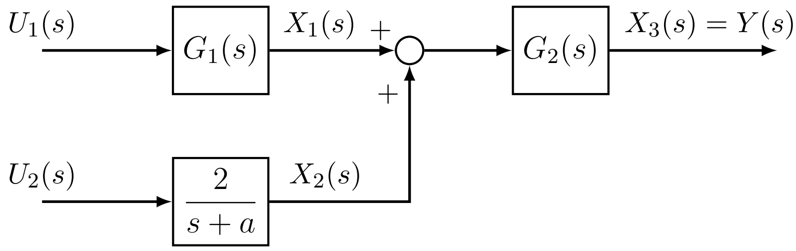

図 1

図中の $U_1(s)$, $U_2(s)$, $X_1(s)$, $X_2(s)$, $X_3(s)$, $Y(s)$ はそれぞれ $u_1(t)$, $u_2(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $y(t)$ のラプラス変換を表す．$G_1(s)$ および $G_2(s)$ を求めよ．

(ii) $a = 0$ とする．このシステムの可制御性と可観測性を判定せよ．ただし，その理由を明らかにすること．

(iii) 入力 $\boldsymbol{u}(t)$ を $u_1(t) = u_2(t) = -y(t)$ とする出力フィードバックを施したシステムが安定となるための a に関する必要十分条件を求めよ．

専門用語の英訳

伝達関数	transfer function
線形時不変システム	linear time-invariant system
ステップ応答	step response
単調増加	monotonically increasing
必要十分条件	necessary and sufficient condition
インパルス応答	impulse response
ボード線図	Bode diagram
ゲイン曲線	log-magnitude curve
折れ線近似	piecewise linear approximation
角周波数	angular frequency
ゲイン	gain
デシベル値	decibel value
ベクトル軌跡	vector locus, polar plot
虚軸	imaginary axis
座標	coordinate
虚数単位	imaginary unit
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
状態変数ベクトル	state variable vector
入力変数ベクトル	input variable vector
出力変数	output variable
ブロック線図	block diagram
ラプラス変換	Laplace transform
可制御性	controllability
可観測性	observability
出力フィードバック	output feedback
安定	stable

【信号処理】解答は，だいだい色の解答用紙に記入すること．

図 1 のブロックダイアグラムに示すように，信号処理システム S, L, H を縦続接続する．S は，図 2 に示すように，連続時間信号 $x(t)$ から間隔 T 秒で一様サンプリングを行い離散時間信号 $x[n]$ を得るシステムであり，このとき，量子化は含まないものとする．L は，$x[n]$ を入力として離散時間信号 $y[n]$ を出力するシステムである．H は，サンプリング定理に従って $y[n]$ から連続時間信号 $y(t)$ を復元するシステムである．ただし，t は連続的な時刻を表す実数，n は離散的な時刻を表す整数である．

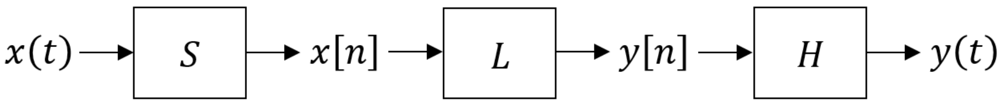

図 1: 対象とする信号処理システムのブロックダイアグラム

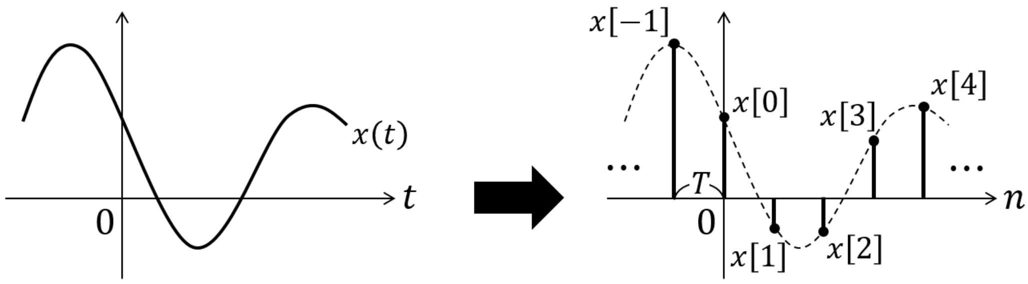

図 2: システム S による連続時間信号 $x(t)$ の一様サンプリング

(i) L が恒等システム，すなわち $y[n] = L[x[n]] = x[n]$ とする．また，$x(t)$ は $x(t) = \cos(400\pi t)$ で表される正弦波であるとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(a) 正弦波 $x(t)$ の基本周期および周波数を求めよ．

(b) $x(t)$ からエイリアシングなしに $x[n]$ が得られるためには T がどのような条件を満たす必要があるか，数式を用いて答えよ．

(c) $T = 0.004$ のとき，$y[n]$ を具体的な数式で表せ．

(d) $T = 0.004$ のとき，$y(t)$ は何 Hz の正弦波となるか，理由とともに答えよ．

(ii) L における入力 $x[n]$ と出力 $y[n]$ が次の関係式を満たすものとする．

$$y[n] \;=\; (1-a)x[n] \;+\; ay[n-1]$$

ここで a は $0 < a < 1$ を満たす実数の定数である．また，$x(t)$ は

$$x(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right), \quad \text{ただし}\ u(t) \;=\; \begin{cases} 1 & (t \geqq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

で表される信号とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(a) $x(t)$ および $x[n]$ を図示せよ．

(b) L の伝達関数を求めよ．ただし，本問における伝達関数は z 変換により定義されるものとする．

(c) 問い (b) で求めた伝達関数をもとに，L の有界入力有界出力安定性を論ぜよ．

(d) $y[n]$ を具体的な数式で表せ．

専門用語の英訳	
ブロックダイアグラム	block diagram
信号処理システム	signal processing system
縦続接続	cascade connection
連続時間信号	continuous-time signal
一様サンプリング	uniform sampling
離散時間信号	discrete-time signal
量子化	quantization
サンプリング定理	Sampling Theorem
恒等システム	identity system
正弦波	sinusoidal wave
基本周期	fundamental period
周波数	frequency
エイリアシング	aliasing
伝達関数	transfer function
z 変換	z transform
有界入力有界出力安定性	bounded-input bounded-output stability