

# 平成31年度大学院博士前期課程入学試験

## 大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報工学専攻

### 専門科目試験問題 (電気工学コース)

(実施時間 14:00 ~ 16:00)

#### 【注意事項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて31ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、①「制御工学」、②「パワーエレクトロニクスと電気機器」、③「電磁気工学1」、「電磁気工学2」、④「量子電子物性1」、「量子電子物性2」、「量子電子物性3」、「量子電子物性4」、及び、⑤「信号処理」、の全部で5分野(①~⑤)9題あり、この順番に綴じられている。この5分野(①~⑤)9題のなかから2分野以上3題を選択し解答すること。
3. 解答開始前に、別紙の「専門科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
4. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【制御工学】 解答は、白色（1番）の解答用紙に記入すること。

以下の問1～問3に答えよ。

問1 図1のブロック線図において、 $R(s)$  から  $C(s)$  までの伝達関数を  $G_1(s)$ ,  $G_2(s)$ ,  $G_3(s)$  を用いて表せ。

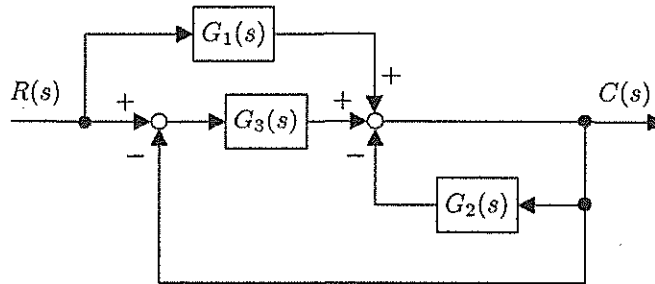


図1

問2 図2のフィードバックシステムについて、以下の問いに答えよ。ただし、 $K$  は実数値をとるゲインであり、 $R(s)$ ,  $C(s)$  はそれぞれ時間関数  $r(t)$ ,  $c(t)$  ( $t \geq 0$ ) のラプラス変換を表す。また、 $E(s)$  は  $e(t) = r(t) - c(t)$  ( $t \geq 0$ ) のラプラス変換を表す。

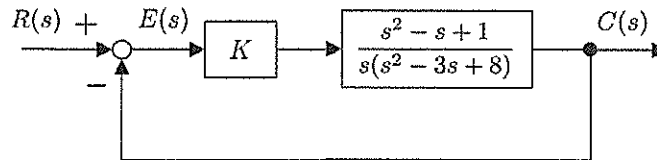


図2

- (i)  $R(s)$  から  $E(s)$  までの伝達関数が安定となるための  $K$  に関する必要十分条件を求めよ。
- (ii)  $K = 5$  としたとき、 $r(t) = t$  ( $t \geq 0$ ) なる単位ランプ入力に対する定常偏差  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  を求めよ。
- (iii)  $K = 5$  としたとき、フィードバックシステムの開ループ伝達関数  $L(s)$  に対する位相  $\angle L(j\omega)$  の角周波数  $\omega$  に関する漸近値  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle L(j\omega)$  と  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle L(j\omega)$  をそれぞれ求めよ。ただし、 $j$  は虚数単位を表し、 $\angle L(j\omega)$  は  $L(j\omega)$  の偏角を表す。
- (iv)  $K$  の値を  $0$  から  $\infty$  へと変化させたときのフィードバックシステムの根軌跡において、無限遠点へ発散しない軌跡が存在する。無限遠点へ発散しない軌跡の終点の座標をすべて求めよ。

問3 次式の状態方程式と出力方程式で与えられる線形時不変システムについて、以下の問いに答えよ。

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t)$$

ただし、係数行列と係数ベクトルは

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられ、 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$  は状態変数ベクトル、 $u(t)$  は入力変数、 $y(t)$  は出力変数である。

- (i) このシステムの可制御性行列を求めよ。
- (ii) このシステムを可制御正準システムに変換せよ。
- (iii) 行列指数関数  $e^{(\mathbf{A}-2\mathbf{b}\mathbf{c})t}$  を求めよ。
- (iv) 入力  $u(t) = -2y(t) + te^{-t}$  ( $t \geq 0$ ) に対する出力  $y(t)$  ( $t \geq 0$ ) を求めよ。ただし、初期状態は  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$  とする。
- (v)  $k$  を正の実数値とし、入力  $u(t) = -ky(t)$  ( $t \geq 0$ ) を施した出力フィードバックシステムを考える。この出力フィードバックシステムの極の実部が  $-\frac{1}{2}$  未満となるための  $k$  に関する必要十分条件を求めよ。

## 専門用語の英訳

ブロック線図	block diagram
伝達関数	transfer function
フィードバックシステム	feedback system
ゲイン	gain
ラプラス変換	Laplace transform
安定	stable
必要十分条件	necessary and sufficient condition
単位ランプ入力	unit ramp input
定常偏差	steady-state error
開ループ伝達関数	open-loop transfer function
位相	phase
角周波数	angular frequency
漸近値	asymptotic value
虚数単位	imaginary unit
偏角	argument
根軌跡	root locus
無限遠点	point at infinity
終点	end point
線形時不変システム	linear time-invariant system
状態方程式	state equation
出力方程式	output equation
係数行列	coefficient matrix
係数ベクトル	coefficient vector
状態変数ベクトル	state variable vector
入力変数	input variable
出力変数	output variable
可制御性行列	controllability matrix
可制御正準システム	controllable canonical system
行列指数関数	matrix exponential function
出力フィードバックシステム	output feedback system
極	pole

【パワーエレクトロニクスと電気機器】解答は、赤色(2番)の解答用紙に記入すること。

以下の問1, 問2に答えよ。

問1 図1(a)にフルブリッジ型DC-DCコンバータの回路を示す。回路は、スイッチ $Q_1\sim Q_4$ 、ダイオード $D_1\sim D_4$ 、変圧器 $T_r$ 、インダクタ $L$ 、キャパシタ $C$ 、負荷抵抗 $R$ から構成され、各素子は理想素子である。入力電圧を $V_{in}$ 、出力電圧を $V_{out}$ とし、 $C$ は $V_{out}$ の変動を無視できるほど十分大きい。 $L_m$ は $T_r$ の励磁インダクタンスを表しており、漏れインダクタンスは無視できるものとする。 $n_p$ 、 $n_s$ はそれぞれ $T_r$ の一次巻線と二次巻線の巻数を表している。また、 $Q$ のスイッチング周期を $T$ 、通流率を $\alpha$  ( $0 < \alpha < 0.5$ )で表し、図1(b)に示すようなオンオフ動作を行うとする。インダクタ電流 $i_L$ が零になる期間が無い電流連続導通モードで回路が周期定常動作する場合について、以下の問いに答えよ。

- (i) 図1(b)に示す期間I( $0 \leq t \leq \alpha T$ )における $T_r$ の一次巻線電圧 $v_p$ 、二次巻線電圧 $v_s$ 、インダクタ電圧 $v_L$ 、および $i_L$ の変化量 $\Delta i_L$ をそれぞれ $\alpha$ 、 $T$ 、 $L$ 、 $n_p$ 、 $n_s$ 、 $V_{in}$ 、 $V_{out}$ の中から必要なものを用いて表せ。
- (ii) 図1(b)に示す期間II( $\alpha T \leq t \leq \frac{T}{2}$ )における $v_L$ 、および $i_L$ の変化量 $\Delta i_L$ をそれぞれ $\alpha$ 、 $T$ 、 $L$ 、 $V_{out}$ の中から必要なものを用いて表せ。
- (iii) 図1(b)に示す期間III( $\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} + \alpha T$ )における励磁電流について、 $\alpha$ 、 $T$ 、 $L_m$ 、 $V_{in}$ を用いて時間 $t$ の関数 $i_m(t)$ として表せ。
- (iv) 周期定常状態における $V_{out}$ を、 $n_p$ 、 $n_s$ 、 $V_{in}$ 、 $\alpha$ を用いて表せ。
- (v)  $v_s$ 、 $D_1$ の電圧 $v_{D1}$ 、 $Q_1$ の電圧 $v_{Q1}$ 、および $i_L$ の各波形の概形を、図1(b)に示す期間I~IVに対応させて描け。振幅がわかるようにそれぞれ最大値、最小値をあわせて示すこと。ただし、 $i_L$ については最小値を $i_{Lmin}$ とおき、これを用いて最大値を表せ。

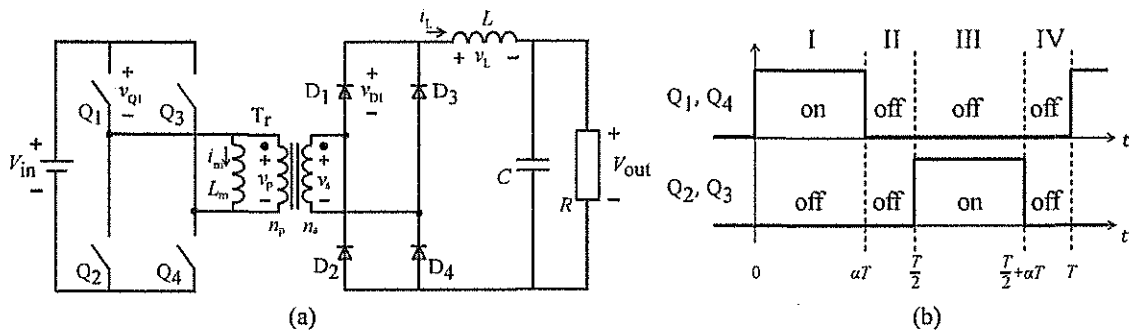


図1

問2 非突極型（円筒型）三相同期発電機の一相分の等価回路を図2に示す。同図において、 $x_s$ を同期リアクタンス、 $r_a$ を電機子巻線抵抗、 $\dot{E}_0$ を公称誘導起電力、 $\dot{V}$ を端子電圧（相電圧）、 $i$ を電機子電流とする。以下の問いに答えよ。

- (i) 同期発電機の電機子反作用では、電機子電流が流れることによって誘導起電力が公称誘導起電力から変化する。電機子電流が流れることにより誘導起電力が変化する理由を簡単に説明せよ。
- (ii) 接続する負荷が力率  $\cos\theta$  の遅れ負荷の場合と進み負荷の場合について、それぞれベクトル図を描け。ただし、 $\dot{E}_0$ 、 $\dot{V}$ 、 $i$ の関係がわかるように描き、力率角  $\theta$  と内部相差角  $\delta$  も図示せよ。
- (iii) 負荷に供給される有効電力（三相分）および無効電力（三相分）を、 $E_0$ 、 $V$ 、 $x_s$ 、 $r_a$ 、 $\delta$  を用いてそれぞれ表せ。ただし、遅れの無効電力（誘導性）を正とする。さらに、 $r_a \ll x_s$  として  $r_a$  を無視したとき、有効電力（三相分）が最大となる  $\delta$  を求めよ。
- (iv) 同期発電機は三相交流電圧を電機子巻線に印加することにより電動機としても動作する。印加する三相交流電圧の周波数を  $f$  とすると、同期速度を極対数  $p$  と  $f$  を用いて表せ。また、 $r_a$  を無視したとき、三相分のトルクを、 $E_0$ 、 $V$ 、 $x_s$ 、 $\delta$ 、 $p$ 、 $f$  を用いて表せ。
- (v) 停止している同期電動機が始動時にトルクを得るための方法として、回転子に施した制動巻線を用いる方法がある。制動巻線を用いて始動トルクが得られる理由を簡単に説明せよ。

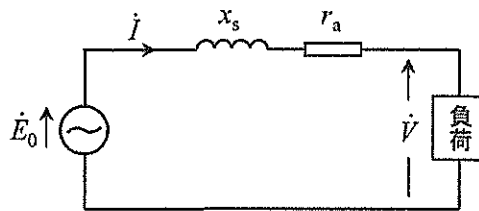


図2

## 専門用語の英訳

フルブリッジ型 DC-DC コンバータ	full-bridge DC-DC converter
ダイオード	diode
変圧器	transformer
負荷抵抗	load resistor
入力電圧	input voltage
出力電圧	output voltage
励磁インダクタンス	magnetizing inductance
漏れインダクタンス	leakage inductance
周期	period
通流率	duty ratio
電流連続導通モード	continuous conduction mode
周期定常動作	periodic steady-state operation
励磁電流	magnetizing current
波形	waveform
振幅	amplitude
非突極型（円筒型）三相同期発電機	non-salient pole (cylindrical rotor) three-phase synchronous generator
等価回路	equivalent circuit
同期リアクタンス	synchronous reactance
電機子巻線抵抗	armature winding resistance
公称誘導起電力	nominal induced electromotive force
端子電圧（相電圧）	terminal voltage (phase voltage)
電機子電流	armature current
電機子反作用	armature reaction
電機子漏れリアクタンス	armature leakage reactance
力率	power factor
力率角	power factor angle
内部相差角	internal phase angle
有効電力（三相分）	active power (three-phase)
無効電力（三相分）	reactive power (three-phase)
三相交流電圧	three phase AC voltage
電機子巻線	armature winding
電動機	motor
極対数	number of pole pairs
制動巻線	dampner winding
同期電動機	synchronous motor
始動トルク	starting torque

【電磁気工学1】 解答は、黄色(3番)の解答用紙に記入すること。

問1~問3について答えよ。

問1 以下の文章中(ア) ~ (ウ)に適切な文字式, (エ)に語句, および(オ) ~ (ケ)に数値をそれぞれ記入せよ。

図1のように, 質量  $m$ , 電荷  $q$  をもつ粒子が, 真空中において電界  $E = 0$ , および一様な静磁界  $B$  の電磁界中を速度  $v$  で運動しているものとする. 速度  $v$  は磁界  $B$  に垂直方向の成分  $v_{\perp}$  と平行方向の成分  $v_{\parallel}$  に分けることができる. また,  $|v|$  は光速に比べ十分小さく, 相対論的な効果は無視する.

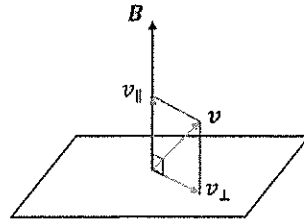


図1

この粒子の運動方程式は,

$$m \frac{dv}{dt} = \boxed{\text{(ア)}} \quad (1)$$

と表すことができる. また, この粒子の運動エネルギーを  $W$  とすると, この運動エネルギーは, 磁界  $B$  に垂直方向の成分  $W_{\perp}$  と平行方向の成分  $W_{\parallel}$  の和となるため,

$$\begin{aligned} W &= W_{\perp} + W_{\parallel} \\ &= \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \end{aligned} \quad (2)$$

と分けることができる. このとき, 荷電粒子は単純なサイクロトロン運動をし, その運動エネルギーの変化量は次式を満たす.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_{\perp}}{dt} + \frac{dW_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (3)$$

ここで回転粒子の磁気モーメントの大きさ  $\mu$  を,

$$\mu \equiv \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} \quad (4)$$

と定義する. ここで  $B$  は磁界  $B$  の大きさである.

つぎに, 粒子のサイクロトロン周波数を  $\omega_c$  とし,  $\partial B / \partial t \ll \omega_c B$  を満たしながら磁界をゆっくり変化させる. 以降, 磁界を変化させる場合はすべてこの条件を満たす. このときの垂直方向の運動エネルギーの変化量は,



$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \boxed{\text{(イ)}} \quad (5)$$

となる。また、磁界に平行方向の運動エネルギーの変化量は、

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{dB}{dt} \quad (6)$$

であることから、全運動エネルギーの変化量は、 $\mu$ を用いて表すと、

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} + \frac{dW_{\parallel}}{dt} = \boxed{\text{(ウ)}} = 0 \quad (7)$$

となる。この関係式は、磁気モーメント  $\mu$  が  $\boxed{\text{(エ)}}$  されることを意味する。

ここで具体的に、磁界に平行方向の速度成分を持たない ( $v_{\parallel} = 0$ )、10 keVの陽子 ( $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ) が、一様な磁界 ( $B = 0.1 \text{ T}$ ) の中を運動している場合を考える。このときの磁気モーメント  $\mu$  は、

$$\mu = \boxed{\text{(オ)}} \text{ J/T} \quad (8)$$

である。磁界を0.1 Tから1 Tへゆっくり変化させると陽子は次第に加速される。1 T になったときの陽子の運動エネルギーは、

$$W = \boxed{\text{(カ)}} \text{ keV} \quad (9)$$

と求まる。

ここで陽子は別の十分重い重イオンと弾性衝突して  $v_{\perp}^* = v_{\perp}$  となった。ここで上付き文字\*は衝突後の速さを示す。その後、磁界はゆっくり変化し1 Tから0.1 Tに下がった場合を考える。この変化後の運動エネルギーを、磁界に平行方向の成分と垂直方向の成分に分け、それぞれ求めると、

$$W_{\parallel} = \boxed{\text{(キ)}} \text{ keV} \quad (10)$$

$$W_{\perp} = \boxed{\text{(ク)}} \text{ keV} \quad (11)$$

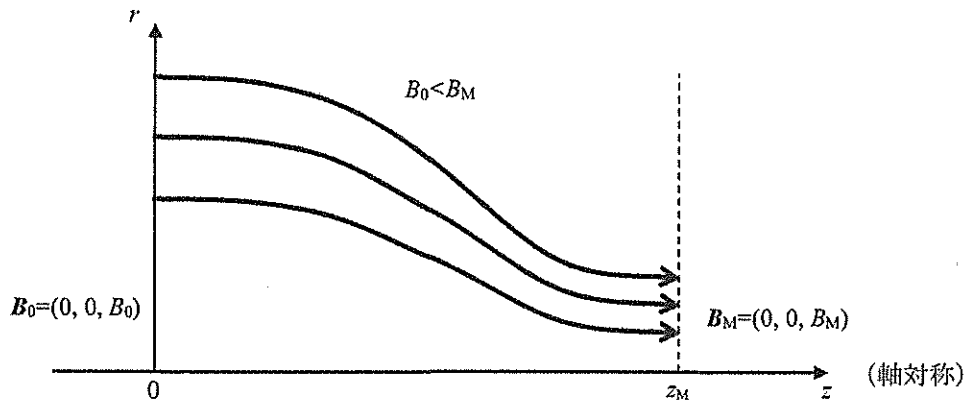
となる。よって最終的に陽子の運動エネルギーは、

$$W = \boxed{\text{(ケ)}} \text{ keV} \quad (12)$$

となる。

問2 式(3)で表されるように運動エネルギーが変化しない理由を簡潔に説明せよ。

問3 図2のような円柱座標系( $r$ - $\theta$ - $z$ 空間)において、磁力線は  $z = z_M$  で絞られる磁気ミラー状に分布している。 $z = 0$  と  $z = z_M$  において、磁界はそれぞれ、 $B_0 = (0, 0, B_0)$  と  $B_M = (0, 0, B_M)$  であり、その間を磁界はなだらかに変化している。 $z = 0$  の位置に、速度  $v_0 = (v_{r_0}, 0, v_{z_0})$ 、磁気モーメント  $\mu_0$  の粒子がある。この粒子が移動して  $z = z_M$  に到達したとき、速度  $v_M = (v_{r_M}, 0, v_{z_M})$ 、磁気モーメント  $\mu_M$  となる。ここで粒子は反射されることから、粒子を閉じ込めることができる。その理由を説明せよ。ただし、電界はないと仮定する。



専門用語の英訳

運動方程式	equation of motion
磁気モーメント	magnetic moment
サイクロトロン周波数	cyclotron frequency
重イオン	heavy ion
磁力線	magnetic field line
磁気ミラー	magnetic mirror
陽子	proton
円柱座標系	cylindrical coordinate system

【電磁気工学2】解答は、水色(4番)の解答用紙に記入すること。

問1~問6について答えよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。

プラズマ中へ入射された単波長平面波の電磁波の伝搬を考える。

問1 電磁波の電界を  $E$ 、磁界を  $B$  とすると、電磁誘導の式とアンペールの法則は、

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} B = j + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2)$$

と与えられる。ただし、 $\mu_0$ は真空の透磁率、 $\varepsilon_0$ は真空中の誘電率、 $j$ は電流密度である。

このとき、(1)式と(2)式から  $B$  を消去すると、

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \boxed{\text{(ア)}} \quad (3)$$

が得られる。(ア)に適切な文字式を答えよ。

問2 電磁波の波数ベクトル  $k$ 、と角周波数  $\omega$  を用いて、 $E$ 、 $B$ 、 $j$  を

$$E = E_1 \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \quad (4)$$

$$B = B_1 \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \quad (5)$$

$$j = j_1 \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \quad (6)$$

と表す。ここで添字の1は1次の摂動を表し、 $r$ は座標ベクトルである。 $E$ 、 $B$ は $j$ に垂直とする。

よって、式(3)を線形化すると、

$$j_1 = \boxed{\text{(イ)}} E_1 \quad (7)$$

が得られる。(イ)に適切な文字式を答えよ。

問3 電磁波の角周波数が大きく、プラズマ中のイオンが追従して動くことはないとする、電流密度  $j$  は電子の速度  $u_e$  に比例し、その摂動は、

$$j_1 = -en_0 u_{e1} \quad (8)$$

と表される。ここで、 $e$ は素電荷、 $n_0$ は電子の数密度である。

また、電子についての運動量保存則

$$m_e n_0 \left[ \frac{\partial u_e}{\partial t} + (u_e \cdot \nabla) u_e \right] = -en_0 E \quad (9)$$

から、電子の速度  $u_e$  の摂動が、

$$u_{e1} = \boxed{\text{(ウ)}} E_1 \quad (10)$$

と表される。ただし、 $m_e$ は電子の質量である。式(8)と式(10)から、 $j_1$ と $E_1$ の関係を示すと、

$$j_1 = \boxed{\text{(エ)}} E_1 \quad (11)$$

となる。(ウ)、(エ)に適切な文字式を答えよ。

問4 式(7)と式(11)から  $j_1$  を消去し、 $E_1 \neq 0$  の解を持つ条件から電磁波の角周波数と波数の分散関係式を示せ。このとき、プラズマ周波数  $\omega_p$  を用いよ。

問5  $x$  軸に波数、 $y$  軸に角周波数をとって、プラズマ中の電磁波の分散関係を図示せよ。

問6 下図のような干渉計を用いたプラズマ診断法について考える。光源から射出された角周波数 $\omega_1$ を持つ電磁波がハーフミラー(HM)で光路1と光路2に分けられ、その後検出器に入射している。両光路は共に真空であり、光路長は等しい。ここで、光路1にプラズマを挿入する。プラズマは光路方向に厚さ1mを持つ十分に大きい平板プラズマであり、密度は一定で十分に低い。全反射ミラー(FM)は反射率を100%とし、HMは入射した光線の50%を反射し、50%を透過する性質を持つとする。検出器において観測される2つの波の位相差 $\Delta\phi$ はWKB近似を用いると、光路の線積分を用いて、

$$\Delta\phi = \int (k_p - k_0) dl \quad (12)$$

と表される。 $l$ はプラズマの厚み方向の長さである。ここで、 $k_p$ 、 $k_0$ はそれぞれ、プラズマ中、真空中での波数である。 $\omega_1 \gg \omega_p$ のとき、測定される位相差は光路1でのプラズマ電子密度と比例することを示せ。プラズマにおける衝突の効果は無視してよい。

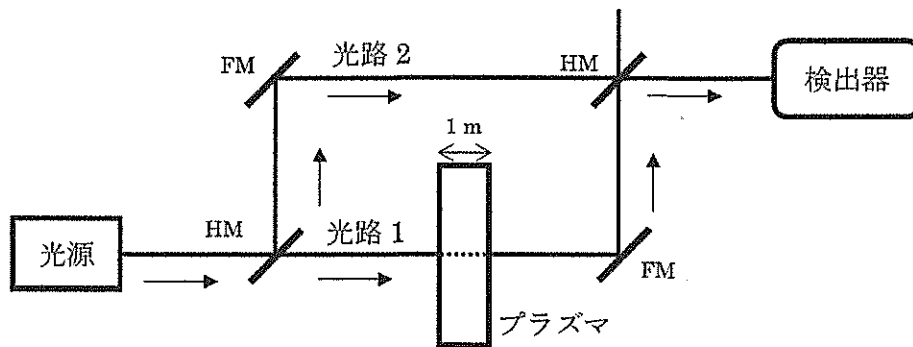


図 干渉計によるプラズマ密度の測定

専門用語の英訳

単波長平面波	single-wavelength planar wave
電磁誘導	electromagnetic induction
アンペールの法則	Ampère's law
透磁率	magnetic permeability
誘電率	permittivity
波数ベクトル	wave vector
角周波数	angular frequency
摂動	perturbation
線形化	linearization
素電荷	elementary charge
数密度	number density
運動量保存則	law of conservation of momentum
分散関係	dispersion relation
干渉計	interferometer
位相差	phase difference

【量子電子物性1】 解答は、桃色(5番)の解答用紙に記入すること。

金属に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、金属中の電子の質量を  $m$ 、素電荷を  $e$ 、ボルツマン定数を  $k_B$ 、プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割った値を  $\hbar$  とする。

周期的境界条件が成り立つ一辺の長さが  $L$  (体積  $V$ ) の立方体形状の金属の中にある  $N$  個の電子について、自由電子モデルを用いて考える。絶対零度において、自由電子密度  $n (= \frac{N}{V})$  とフェルミ波数  $k_F$  の間には、以下の関係が成り立つ。

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \quad (1)$$

フェルミエネルギー  $\varepsilon_F$  は、 $k_F$  を使って

$$\varepsilon_F = [ \quad \text{①} \quad ] \quad (2)$$

と書けるので、 $n$  は次式で与えられる。

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon_F^{\frac{3}{2}} \quad (3)$$

式(3)において、 $\varepsilon_F$  を自由電子のエネルギー  $\varepsilon$  に置き換えると、 $\varepsilon$  以下の状態にある自由電子密度  $n(\varepsilon)$  が得られる。したがって、状態密度  $D(\varepsilon)$  は次式で与えられる。

$$D(\varepsilon) = \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon} = [ \quad \text{②} \quad ] \quad (4)$$

これから、 $n$  は次式で与えられる。

$$n = \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon \quad (5)$$

状態密度  $D(\varepsilon)$  は、フェルミエネルギーにおける状態密度  $D(\varepsilon_F)$  を用いて、 $D(\varepsilon) = D(\varepsilon_F) (\varepsilon / \varepsilon_F)^{\frac{1}{2}}$  と書けるので、 $D(\varepsilon_F)$  は、 $n$  と  $\varepsilon_F$  を使って、次式のように簡単に表せる。

$$D(\varepsilon_F) = [ \quad \text{③} \quad ] \quad (6)$$

フェルミ温度  $T_F$  よりも十分低い有限温度  $T$  ( $0 < T \ll T_F$ ) では、電子の占有確率はフェルミディラック関数

$$f(\varepsilon, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{k_B T}\right) + 1} \quad (7)$$

で与えられ、温度  $T$  を考慮した自由電子密度  $n(\varepsilon, T)$  は、 $\int_0^{\infty} ([ \quad \text{④} \quad ]) d\varepsilon$  で表される。

なお、式(7)において、正確には  $\varepsilon_F$  ではなく化学ポテンシャルを用いるべきであるが、 $T \ll T_F$  の条件では殆ど同じであるとして  $\varepsilon_F$  を用いた。

次に、金属の熱伝導について考える。絶対零度では、フェルミディラック関数  $f(\varepsilon, T)$  は、 $\varepsilon \leq \varepsilon_F$  で [ ⑤ ],  $\varepsilon > \varepsilon_F$  で [ ⑥ ] の値を持つ階段関数となる。有限温度  $T$  ( $0 < T \ll T_F$ ) では、 $f(\varepsilon, T)$  は  $\varepsilon = \varepsilon_F$  の近傍で階段関数からずれる。そのエネルギー幅は、 $\varepsilon_F$  の前後の  $2k_B T$  程度であり、 $\varepsilon_F$  を中心に  $4k_B T$  程度の幅を持つ。すなわち、自由電子の昇温による温度変化においては、フェルミエネルギー付近のエネルギー幅  $4k_B T$  程度の状態にある電子が熱的な影響を受ける。

このことを考慮して、低温度領域 ( $0 < T \ll T_F$ ) での単位体積あたりの電子比熱  $C_{el}$  を計算すると、次式が得られる。

$$C_{el} = \int_0^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon_F) D(\varepsilon) \frac{\partial f(\varepsilon, T)}{\partial T} d\varepsilon = \frac{\pi^2}{3} D(\varepsilon_F) k_B^2 T \quad (8)$$

ここで、 $T \ll T_F$  では電子密度が式(5)で近似できるものと仮定して、式(6)および  $\varepsilon_F = k_B T_F$  を用いると、 $C_{el}$  は次式で表される。

$$C_{el} = ([ ⑦ ]) \times n \frac{T}{T_F} \quad (9)$$

自由電子の熱伝導率  $K$  は、 $C_{el}$ 、フェルミ速度  $v_F$ 、散乱の緩和時間  $\tau$  の関数として、 $K = \frac{1}{3} C_{el} v_F^2 \tau$  で与えられる。これから、 $K$  は、 $\varepsilon_F = \frac{1}{2} m v_F^2$  および  $\varepsilon_F = k_B T_F$  を用いると  $n$ 、 $k_B$ 、 $T$ 、 $m$ 、 $\tau$  を使って、

$$K = [ ⑧ ] \quad (10)$$

と求まる。

一方、自由電子の電気伝導率  $\sigma$  は、 $n$ 、 $e$ 、 $m$ 、 $\tau$  を使って、次式で与えられる。

$$\sigma = [ ⑨ ] \quad (11)$$

したがって、 $K$  と  $\sigma$  の間には、次式の関係が成り立つ。

$$\frac{K}{\sigma} = ([ ⑩ ]) \times T \quad (12)$$

上式は、 $\frac{K}{\sigma}$  が温度に比例することを示している。この関係は、ヴィーデマン-フランツの法則として知られている。

問1 文章中の空欄 [ ① ] ~ [ ⑩ ] にあてはまる数式または数値を答えよ。

問2 式(1)を導出せよ。導出においては、自由電子の電子状態が、半径  $k_F$  のフェルミ球の中で

$k_x$ 、 $k_y$ 、 $k_z$  方向に  $\frac{2\pi}{L}$  の周期で離散的に分布した波数空間の中の点の集まりとして表され、

一つの電子状態にはスピンを考慮して2個の電子が占有されることを用いよ。



問3 図1-1を解答用紙に転記し、有限温度 $T$  ( $0 < T \ll T_F$ )におけるフェルミーディラック関数

$f(\varepsilon, T)$ を電子のエネルギー $\varepsilon$ の関数として図示せよ。次に、 $\left. \frac{\partial f(\varepsilon, T)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}$ を求め、 $\varepsilon = \varepsilon_F$ における接線の関数 $g(\varepsilon, T)$ を導け。さらに、この接線を同一グラフ上に描き、 $g(\varepsilon, T) = 1$ および $g(\varepsilon, T) = 0$ となる $\varepsilon$ の値から、 $f(\varepsilon, T)$ が変化するエネルギー幅が $4k_B T$ 程度であることを示せ。

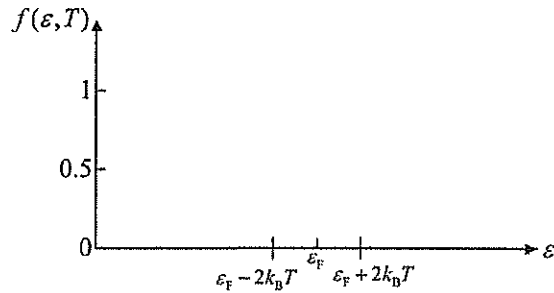


図 1-1

問4 図1-2を解答用紙に転記し、絶対零度および $T = T_0$  (ただし、 $0 < T_0 \ll T_F$ )における状態密度と電子の占有確率の積を電子のエネルギー $\varepsilon$ の関数として図示せよ。ただし、絶対零度および $T = T_0$ での関数は、それぞれ実線および点線を使って同じ図に示すこと。次に、絶対零度から $T = T_0$ に昇温するとき、電子が熱的に励起される領域と電子が新たに占める領域を、図中に網掛けで示せ。

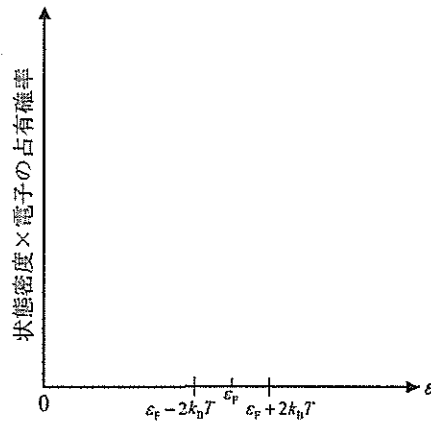


図 1-2

問5 式(9)は、全ての自由電子のうち、わずか $\frac{T}{T_F}$  (室温では $\sim 0.01$ 以下)の割合だけが熱エネルギーを吸収して励起されることを示している。この理由について、「フェルミ面」、「パウリの排他原理」をキーワードとして100字以内で述べよ。

## 量子電子物性1 単語の英訳

金属：	metal
質量：	mass
素電荷：	elementary charge
ボルツマン定数	Boltzmann constant
プランク定数：	Planck constant
周期的境界条件：	periodic boundary condition
立方体：	cube
自由電子：	free electron
絶対零度：	absolute zero temperature
自由電子密度：	density of free electrons
フェルミ波数：	Fermi wavenumber
フェルミエネルギー：	Fermi energy
状態密度：	density of states
フェルミ温度：	Fermi temperature
有限温度：	finite temperature
電子の占有確率：	probability of electron occupation
フェルミディラック関数：	Fermi-Dirac distribution function
化学ポテンシャル：	chemical potential
階段関数：	step function
エネルギー幅：	energy width
昇温：	rising temperature
単位体積あたり：	per unit volume
電子比熱：	electronic specific heat
熱伝導率：	thermal conductivity
フェルミ速度：	Fermi velocity
緩和時間：	relaxation time
電気伝導率：	electrical conductivity
ヴィーデマン-フランツの法則：	Wiedemann-Franz law
半径：	radius
フェルミ球：	Fermi sphere
周期：	period
離散的に：	discretely
波数空間：	wavenumber space
点：	point
スピン：	spin
転記：	transcription
関数：	function

接線：	tangent line
積：	product
実線：	solid line
点線：	dotted line
熱的に励起される：	be excited thermally
領域：	area
網掛け：	hatching
フェルミ面：	Fermi surface
パウリの排他原理：	Pauli exclusion principle

【量子電子物性2】 解答は、緑色(6番)の解答用紙に記入すること。

半導体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数を $k_B$ とする。

GeやSiの単結晶の結晶構造は〔 ㉞ 〕型構造であり、各原子の価電子は最近接原子と共有結合をしている。一つのGe原子に着目すると、そのまわりには〔 ㉟ 〕個の価電子が存在して閉殻構造を形成しているとみなすことができ、これ以上電子を詰めることはできない。バンド理論から、この状態の電子は価電子帯を占有し、価電子帯は絶対零度では満ちたバンドとなっている。エネルギー幅 $\varepsilon_g$ の禁制帯を隔ててそのエネルギー帯の上に空の伝導帯がある。温度が上昇するにつれて、価電子帯から伝導帯へと電子が熱的に励起される。この電子は価電子帯の正孔とともに電気伝導に寄与し、これらをキャリアと呼ぶ。ここで、キャリア1個の電荷量を $q$ で表す。これまでに述べた半導体の場合、伝導帯の電子密度 $n_0$ と価電子帯の正孔密度 $p_0$ は〔 ㊱ 〕の関係式を満たしている。このような半導体を〔 ㊲ 〕半導体とよぶ。

半導体の性質は、添加した微量の不純物によって大きく変化する。母体である半導体に電子を与える不純物を〔 ㊳ 〕、正孔を与える不純物を〔 ㊴ 〕と呼ぶ。SiにPを不純物として添加すると〔 ㊵ 〕個の価電子のうち4個はSiとの共有結合にあずかり、〔 ㊶ 〕個は不純物原子の周りに緩く束縛される。この余剰電子は比較的簡単に熱的に励起され、キャリアとなって結晶中を動き回ることができる。一方、Bをドーピングした場合には、電子が〔 ㊷ 〕個不足した状態になるので、正孔が〔 ㊸ 〕個供給されることとなる。このような半導体を、〔 ㊹ 〕半導体に対して、〔 ㊺ 〕半導体と呼ぶ。

〔 ㊻ 〕不純物から供給された電子はクーロンポテンシャルによって不純物イオンに束縛されている。基底状態でのその束縛エネルギーは数十 meV 程度であるため、室温では〔 ㊼ 〕不純物はイオン化し、電子はキャリアとして半導体全体を動き回ることができる。〔 ㊽ 〕半導体であるSiに、 $1 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ の密度でPなどの〔 ㊾ 〕不純物を添加した。300 Kでは、この不純物すべてがイオン化しているとする、300 Kでの伝導帯の電子密度はおおよそ〔 ㊿ 〕 $\text{cm}^{-3}$ となる。

ドーピングによりキャリアが一種類とみなすことのできる半導体Aについて考える。絶対温度 $T$ の熱平衡下では、キャリアは $k_B T$ に比例した平均的な運動エネルギーを持ち、半導体結晶中を平均的な熱速度でランダムな方向へ運動している。その途中、キャリアは格子振動やイオン化した不純物原子などによって散乱される。弱電界 $\mathbf{E}$ が加えられると、キャリアは電界で加速されるが、電界から得た運動量を散乱により完全に失う。結晶中のキャリアの運動は有効質量を用いると古典論での扱いが可能となる。今、キャリアの緩和時間を $\tau$  (定数)、キャリア密度を $n$ 、キャリアの有効質量を $m^*$ とする。緩和時間 $\tau$ 内にキャリアが得るドリフト速度 $\mathbf{v}_D$ は $\tau$ と $\mathbf{E}$ を用いて $\mathbf{v}_D =$ 〔 ㊿ 〕で与えられる。移動度 $\mu$ は、

ドリフト速度と電界の比例係数の絶対値で定義される。このキャリアの運動によってドリフト電流が流れる。ドリフト電流の電流密度  $\mathbf{J}$  はドリフト速度  $\mathbf{v}_D$  を用いて  $\mathbf{J} = [ \quad \textcircled{8} \quad ]$  と書き表されるので、電気伝導率  $\sigma_0$  は移動度  $\mu$  と  $|q|$  を用いて  $[ \quad \textcircled{9} \quad ]$  となる。

半導体 A に、電界  $\mathbf{E}$  と磁束密度  $\mathbf{B}$  なる磁界を印加した場合を考える。キャリアのドリフト速度  $\mathbf{v}_D$  の時間変化は、上記の散乱過程を考慮に入れて

$$m^* \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = [ \quad \textcircled{10} \quad ] \quad (1)$$

と書き表される。今、電界  $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$  と磁束密度  $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$  なる磁界を印加した場合を考える。定常状態では  $\frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = 0$  なので、 $\mathbf{v}_D = (v_x, v_y, v_z)$ 、 $\omega = \frac{qB_z}{m^*}$  とおいて、 $v_x$  と  $v_y$  を求め、 $E_x$  と  $E_y$  の項に分けて書くと

$$v_x = \frac{q}{m^*} \{ ([ \quad \textcircled{11} \quad ]) \times E_x + ([ \quad \textcircled{12} \quad ]) \times E_y \} \quad (2)$$

$$v_y = \frac{q}{m^*} \{ ([ \quad \textcircled{12} \quad ]) \times (-E_x) + ([ \quad \textcircled{11} \quad ]) \times E_y \} \quad (3)$$

となる。電流密度は  $\mathbf{J} = [ \quad \textcircled{8} \quad ]$  で与えられるので、その成分  $J_x$ 、 $J_y$  が求まる。

問 1 文章中の空欄 [  $\textcircled{7}$  ] ~ [  $\textcircled{8}$  ] にあてはまる語句を、空欄 [  $\textcircled{1}$  ] ~ [  $\textcircled{12}$  ] にあてはまる数値、数式または関係式を答えよ。

問 2 [  $\textcircled{4}$  ] 半導体である Si の 300 K と 1,000 K での伝導帯の電子密度をそれぞれ  $1 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ 、 $1 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$  とする。文章中の [ 下線 ] のときの、300 K と 1,000 K での価電子帯の正孔密度を求めよ。その導出過程も書くこと。答えは有効数字 1 桁で良い。

問 3 上の議論をもとにホール効果測定について考える。図 2-1 に示すように、試料 (半導体 A) に対して、電流密度  $J_x$  の直流電流を  $x$  方向に一様に流し、 $(\omega\tau)^2 \ll 1$  を満たす磁束密度  $B_z$  の一様な静磁界を  $z$  方向に印加した。このとき、定常状態で  $y$  方向にホール電界  $E_y$  が発生した。

(1) ホール抵抗  $R_H = \frac{E_y}{J_x B_z}$  を、 $n$  を用いて表せ。その導出過程も書くこと。

(2)  $n$  型半導体の試料に発生するホール電圧  $V_H$  を図 2-1 に示すように測定したとき、端子 1、2 のいずれが正となるか答えよ。

(3) 定常状態では、式(2)、(3)より  $J_x = \sigma_0 E_x$  なる関係式が導かれ、磁界中での  $x$  方向の電気伝導率は零磁場のときの電気伝導率  $\sigma_0$  と等しくなる。その理由を 30 字程度で説明せよ。

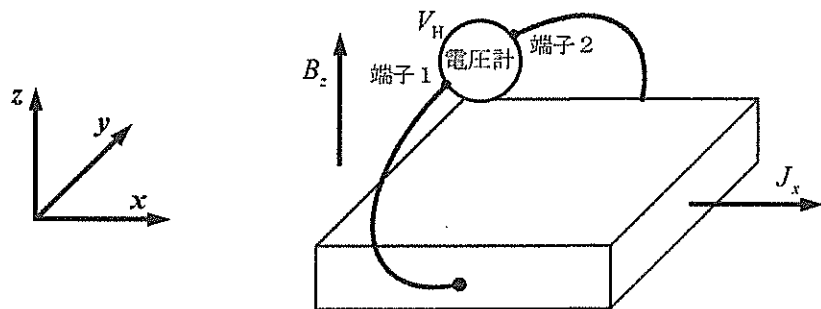


图 2-1

## 量子電子物性2 単語の英訳

半導体：	semiconductor
ボルツマン定数：	Boltzmann constant
結晶構造：	crystal structure
価電子：	valence electron
共有結合：	covalent bond
閉殻：	closed shell
価電子帯：	valence band
禁制帯：	forbidden band / band gap
伝導帯：	conduction band
正孔：	hole
電気伝導率：	electrical conductivity
キャリア：	carrier
密度：	density
不純物：	impurity
ドーピング：	doping
電界：	electric field
運動量：	momentum
有効質量：	effective mass
緩和時間：	relaxation time
ドリフト速度：	drift velocity
移動度：	mobility
磁束密度：	magnetic flux density
磁界：	magnetic field
定常状態：	steady state
ホール効果：	Hall effect

【量子電子物性3】 解答は、灰色(7番)の解答用紙に記入すること。

金属-半導体接触に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。数値は端数を四捨五入し有効数字2桁まで求め、単位も示して解答せよ。ただし、ボルツマン定数を  $k_B (=1.4 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} = 8.6 \times 10^{-5} \text{ eVK}^{-1})$ 、素電荷を  $q (=1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$  とし、必要ならば  $\log_e 10 \cong 2.3$ ,  $\log_e 2 \cong 0.69$  ( $e$ は自然対数の底)の値を用いよ。

図3-1に示すような電子親和力  $\chi_s$ 、仕事関数  $\phi_s$ 、バンドギャップ  $\varepsilon_g$  の半導体と、仕事関数  $\phi_m$  の金属の接触を考える。急峻で界面準位のない理想的な接触界面が形成されるとする。この半導体が n 型の場合、金属と半導体の仕事関数の間に  $\phi_m > \phi_s$  の関係があると [ ㉞ ] 接触となり、 $\phi_m < \phi_s$  の関係があると [ ㉟ ] 接触となる。 $\phi_m > \phi_s$  の関係がある金属と n 型半導体が接触すると [㉞ (a) 半導体側から金属側に、(b) 金属側から半導体側に] 電子が移動し、金属と半導体のフェルミ準位  $\varepsilon_F$  が一致したところで平衡状態に達する。その結果、金属と接する半導体表面近傍には、イオン化したドナーが残された

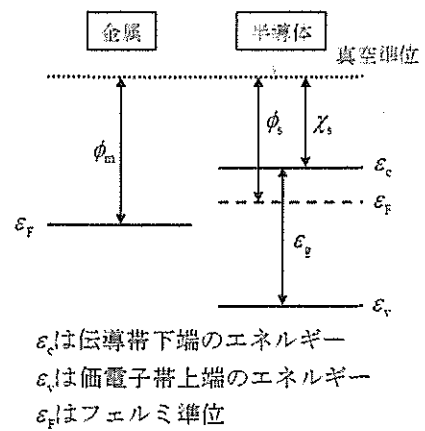


図 3-1

[ ㉞ ] とよばれる領域が形成される。この領域は電子に対するエネルギー障壁となる。この障壁を金属の  $\vare_F$  から測った障壁エネルギー  $\phi_B$  を障壁高さとして、[ ㉞ ] から十分に離れた半導体の伝導帯下端から見たエネルギー障壁の高さを  $qV_d$  と表し、 $V_d$  を [ ㉞ ] とよぶ。このとき、 $\phi_B$  と  $qV_d$  はそれぞれ次のように示される。

$$\phi_B = [ \text{㉟} ] \quad (1)$$

$$qV_d = [ \text{㉟} ] \quad (2)$$

一方、この半導体が p 型の場合は  $\phi_m < \phi_s$  の関係があるときに [ ㉟ ] 接触が得られる。この場合は半導体中のイオン化したアクセプタによる正孔に対する障壁が生じる。このとき、正孔に対する  $\phi_B$  と  $qV_d$  はそれぞれ次のように示される。

$$\phi_B = [ \text{㉟} ] \quad (3)$$

$$qV_d = [ \text{㉟} ] \quad (4)$$

したがって、同種の半導体からなる n 型半導体と p 型半導体がそれぞれある金属と接触したとき、金属側から見たエネルギー障壁の障壁高さの和は、常にその半導体の [ ㉟ ] と等しくなる。



次に、[ ㉞ ] 接触となる金属-n型半導体接触における電流密度-電圧特性を、 $\phi_B$  以上のエネルギーを持つ電子だけが障壁を越えて電流に寄与するとする熱電子放出モデルで考える。順方向（金属側を正、半導体側を負）を正とする電圧  $V_0$  を印加するとき、半導体側から見たエネルギー障壁の高さは  $qV_0$  だけ [㉞ (a) 高くなる、(b) 低くなる]。絶対温度  $T$  ( $T > 0$ ) における半導体の伝導帯中の電子密度を  $n$  とする。電子のエネルギー分布はボルツマン分布で近似できると仮定し、伝導帯下端のエネルギーを  $\varepsilon_c$ 、フェルミ準位のエネルギーを  $\varepsilon_F$ 、絶対温度  $T$  における伝導帯の有効状態密度を  $N_c$  とする。  $n$  が、

$$n \cong N_c \exp\left(-\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_F}{k_B T}\right) \quad (5)$$

で与えられることを使えば、 $n$  のうち、障壁を越えるエネルギーをもつ電子の密度  $n_{th}$  は、次のように表すことができる。

$$n_{th} = n \exp\left[-\frac{q(V_d - V_0)}{k_B T}\right] = N_c \times ([㉞ \{ \phi_B, k_B, T, V_0, q \}]) \quad (6)$$

金属から半導体へ向けて障壁を越える電子による電流密度を  $J_1$ 、半導体から金属への電流密度を  $J_2$  とする。絶対温度  $T$  において  $J_2$  は  $n_{th}$  に比例すると考えると、 $J_2 = K n_{th}$  ( $K$  は比例定数) と表せる。印加電圧  $V_0 = 0$  のとき正味の電流は流れないので、以下の関係が成り立つ。

$$J_1 = J_2 = K N_c \times ([㉞ \{ \phi_B, k_B, T \}]) \quad (7)$$

電圧  $V_0$  を印加しても金属側から見た障壁高さは  $\phi_B$  のまま変化しないと考えると、 $J_1$  は印加電圧に依らず一定である。これより、電圧  $V_0$  印加時に障壁を流れる正味の電流密度  $J$  ( $= J_2 - J_1$ ) は以下のように表せる。

$$J = K N_c \times ([㉞ \{ \phi_B, k_B, T, V_0, q \}]) \quad (8)$$

ここで  $K N_c$  は定数  $A^*$  を用いて、 $K N_c = A^* T^2$  と表される。この定数  $A^*$  をリチャードソン定数という。

次に、室温において、金属-n型半導体 [ ㉞ ] 接触に形成される [ ㉞ ] 幅  $W$  および接触面における単位面積当たりの静電容量（障壁容量） $C$  を、順方向を正とする印加電圧  $V_0$  の関数として求める。ここでは図 3-2 に示すように、深さ方向を  $x$  とする金属-半導体接触について考える。

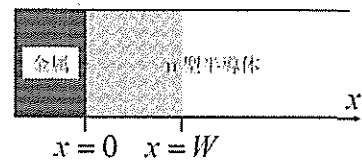


図 3-2

金属-半導体界面は  $x=0$ 、半導体は  $x \geq 0$  に存在し、[ ㉞ ] は  $0 \leq x \leq W$  の範囲に存在するものとする。真空の誘電率を  $\varepsilon_0$ 、半導体の比誘電率を  $\kappa$ 、ドナー濃度を  $N_d$  とする。ドナーは半導体全体 ( $x \geq 0$ ) に一様に分布しており、全てイオン化しているものとする。簡単のため、[ ㉞ ] 内のキャリア密度は無視できるとすると、[ ㉞ ] 内の電位  $V(x)$  に関するポアソン方程式は次のようになる。

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = [ \quad \text{㉘} \quad ] \quad (9)$$

境界条件として [ ㉙ ] の外部 ( $x > W$ ) では電界が発生していないと仮定して, [ ㉚ ] 内の電界  $E(x)$  を求めると

$$E(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = [ \quad \text{㉛} \quad ] \quad (10)$$

さらに電位  $V(x)$  を求めて, 境界条件  $V(0) = 0$ ,  $V(W) = V_d - V_0$  を用いると, [ ㉜ ] 幅  $W$  として

$$W = [ \quad \text{㉝} \quad ] \quad (11)$$

が得られる. したがって, 単位面積当たりの静電容量 (障壁容量)  $C$  は

$$C = [ \quad \text{㉞} \quad ] \quad (12)$$

と求まる.

問 1 文章中の空欄 [ ㉟ ] ~ [ ㊱ ] に当てはまる語句を答えよ. [ ㉟ ], [ ㊱ ] は (a), (b) のどちらか適切な方を一つ選ぶこと.

問 2 文章中の空欄 [ ㊲ ] ~ [ ㊴ ] に当てはまる数式を  $\{\chi_s, \phi_s, \epsilon_y, \phi_m\}$  のうちからそれぞれ必要なものを用いて示せ.

問 3 文章中の空欄 [ ㊵ ] ~ [ ㊷ ] に当てはまる数式を本文中の { } のうちの文字記号を用いて示せ. (ヒント: ㊵ はバンド図を描くと分かりやすい.)

問 4 ある金属と n 型半導体との接触において, 電流密度-電圧特性が式(8)に従うとする. 逆方向に十分に大きな電圧を印加した時の飽和電流密度  $J$  が  $-9.0 \times 10^{-5} \text{ Acm}^{-2}$  であった.  $A^*$  を  $100 \text{ AK}^{-2}\text{cm}^{-2}$ ,  $T$  を  $300 \text{ K}$  として,  $\phi_B$  の値を求めよ.

問 5 文章中の空欄 [ ㊸ ], [ ㊹ ] に当てはまる数式を  $\{q, N_d, \kappa, \epsilon_0, x, W\}$  のうちから, また空欄 [ ㊺ ], [ ㊻ ] に当てはまる数式を  $\{q, N_d, \kappa, \epsilon_0, V_d, V_0\}$  のうちからそれぞれ必要なものを用いて示せ.

問 6 問 4 とは異なる金属と n 型半導体の接触において, 障壁容量  $C$  と印加電圧  $V_0$  の関係を調べたところ,  $C^{-2} = 1.0 \times 10^{15} - 2.0 \times 10^{15} V_0 \text{ (cm}^4\text{F}^{-2}\text{)}$  の関係が得られた. このときの  $V_d$ ,  $N_d$  および  $\phi_B$  の値を計算し, 導出過程が分かるように示せ. ただし,  $T$  は  $300 \text{ K}$ ,  $N_c$  は  $3.5 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\kappa$  は  $10$ ,  $\epsilon_0$  は  $8.9 \times 10^{-14} \text{ Fcm}^{-1}$  とする.

### 量子電子物性3 単語の英訳

金属：	metal
半導体：	semiconductor
接触：	contact
素電荷：	elementary charge
ボルツマン定数：	Boltzmann constant
電子親和力：	electron affinity
仕事関数：	work function
急峻な：	abrupt
界面準位：	interface state
フェルミ準位：	Fermi level
伝導帯：	conduction band
価電子帯：	valence band
真空準位：	vacuum level
平衡状態：	equilibrium state
エネルギー障壁：	energy barrier
障壁高さ：	barrier height
正孔：	hole
電流密度：	current density
熱電子放出モデル：	thermionic emission model
絶対温度：	absolute temperature
電子密度：	electron density
ボルツマン分布：	Boltzmann distribution
有効状態密度：	effective density of states
比例定数：	proportional constant
印加電圧：	applied voltage
正味の：	net
リチャードソン定数：	Richardson constant
障壁容量：	barrier capacitance
誘電率：	permittivity
キャリア密度：	carrier density
電位：	electric potential
ポアソン方程式：	Poisson's equation
境界条件：	boundary condition
電界：	electric field

【量子電子物性4】 解答は、青色(8番)の解答用紙に記入すること。

誘電体に関する次の文章を読み、下記の問いに答えよ。ただし、真空の誘電率を  $\epsilon_0$ 、素電荷を  $e$ 、虚数単位を  $i$  とする。

[I] 誘電体に外部電界を印加すると、分極によって電気双極子が誘起され、電磁気学でいう平均の電界  $\mathbf{E}$  がかかる。固体中のように原子や分子が密に存在すると、個々の電気双極子に働く電界は  $\mathbf{E}$  ではなく、この電気双極子モーメントはその原子や分子に作用する局所電界  $\mathbf{E}_{\text{loc}}$  に比例する。電気双極子モーメントが複数種類あるとし、 $j$  種の分極率を  $\alpha_j$ 、その密度を  $N_j$  とすると、誘電体内に誘起される分極  $\mathbf{P}$  は、

$$\mathbf{P} = \sum_j ([ \quad \textcircled{1} \quad ]) \quad (1)$$

と表すことができる。一般に局所電界係数を  $\gamma$  とするとき、

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\gamma}{3\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (2)$$

となる。誘電体の比誘電率を  $\kappa$  とすると

$$\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = [ \quad \textcircled{2} \quad ] \quad (3)$$

であるから、 $\gamma = 1$  のときの  $\kappa$  と  $\sum_j N_j \alpha_j$  の関係式は

$$[ \quad \textcircled{3} \quad ] = \frac{1}{3\epsilon_0} \sum_j N_j \alpha_j \quad (4)$$

と表される。この式は、[  $\textcircled{4}$  ] の式とよばれ、原子や分子のミクロな分極率とマクロな比誘電率を関係づけるものである。

[II] 物質は、振動電界に対する応答の点では、様々な固有振動数をもつ電気双極子の集まりとみなされる場合がある。そこで1つの電気双極子をばねで束縛された電荷とみなし、速度に比例する制動力を受けながら振動する調和振動子として扱うローレンツモデルを考える。振動子の質量、電荷、固有角周波数をそれぞれ  $m$ 、 $q$ 、 $\omega_0$  とする。外から加えられた角周波数  $\omega$  で時間  $t$  に依存する  $x$  方向の振動電界  $E_0 \exp(-i\omega t)$  の影響下にある振動子の運動方程式は、

$$m \left( \frac{d^2}{dt^2} X + \Gamma_0 \frac{d}{dt} X + \omega_0^2 X \right) = ([ \quad \textcircled{5} \quad ]) \times \exp(-i\omega t) \quad (5)$$

となる。ここで  $X$  は振動子の平衡位置からの変位、 $\Gamma_0$  ( $> 0$ ) は制動力による振動の減衰を表す係数である。

変位  $X$  は振動電界に追従して  $\omega$  で振動することから、運動方程式の解は  $X = X_0 \exp(-i\omega t)$  で表されるとすると

$$X_0 = ([ \quad \textcircled{6} \quad ]) \times \exp(i\theta) \quad (6)$$

が得られる。ただし $\theta$ は位相であり、

$$\tan \theta = \frac{[ \quad \textcircled{7} \quad ]}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7)$$

と表される。したがって本モデルで考える電気双極子が単位体積あたり $N$ 個あるとき、分極 $P(\omega, t)$ は

$$P(\omega, t) = P_0 \exp\{-i(\omega t - \theta)\} \quad (8)$$

と表される。ここで

$$P_0 = [ \quad \textcircled{8} \quad ] \quad (9)$$

である。すなわち分極は振動電界に対して位相が $\theta$ 遅れて振動している。 $\Gamma_0 > 0$ であるから、 $\omega$ を零から大きくしていくと $\theta$ は $\omega = \omega_0$ で $\theta = [ \quad \textcircled{9} \quad ]$ となり、 $\omega \gg \omega_0$ では $\theta = [ \quad \textcircled{10} \quad ]$ に近づく。

ここで $q = -e$ とした [  $\textcircled{11}$  ] 分極では、光学領域の振動に対する応答を考えた場合、複素分極率の実数部は物質の [  $\textcircled{12}$  ]、虚数部は消衰係数に関連している。

一般に、物質の全分極率には3種類の分極の寄与が考えられ、分極は印加する振動電界の周波数に依存する。 $10^{15}$  Hz 以上の高い周波数領域まで電界に応答する [  $\textcircled{13}$  ] 分極、 $10^{12} \sim 10^{14}$  Hz の周波数領域まで電界に応答を示すことが多い [  $\textcircled{14}$  ] 分極、 $10^{10}$  Hz 以下の比較的低い周波数で電界応答を示す [  $\textcircled{15}$  ] 分極である。分極が振動電界に追従できなくなると、その分極は分極率に寄与しなくなるため分極率は減少する。このような分極の周波数依存性は [  $\textcircled{16}$  ] とよばれ、[下欄] [  $\textcircled{17}$  ] の起こる周波数では、印加された振動電界のエネルギーの [  $\textcircled{18}$  ] が大きくなる。

[III] 強誘電体は電界を印加しなくとも零ではない分極、つまり [  $\textcircled{19}$  ] 分極を有し、その分極の向きは電界によって変えることができる。ペロブスカイト族のチタン酸バリウム ( $\text{BaTiO}_3$ ) は、約 393 K の [  $\textcircled{20}$  ] 温度  $T_1$  より高い温度では [  $\textcircled{21}$  ] 相を示す。その結晶構造は [  $\textcircled{22}$  ] 相では [  $\textcircled{23}$  ] 晶をしており、体心に [  $\textcircled{24}$   $\text{Ba}^{2+}, \text{Ti}^{4+}, \text{O}^{2-}$  ] イオン、面心に [  $\textcircled{25}$   $\text{Ba}^{2+}, \text{Ti}^{4+}, \text{O}^{2-}$  ] イオン、8つの角に [  $\textcircled{26}$   $\text{Ba}^{2+}, \text{Ti}^{4+}, \text{O}^{2-}$  ] イオンがある。 $T_1$  より低い温度では結晶が変形し、 [  $\textcircled{27}$   $\text{Ba}^{2+}, \text{Ti}^{4+}, \text{O}^{2-}$  ] イオンと [  $\textcircled{28}$   $\text{Ba}^{2+}, \text{Ti}^{4+}, \text{O}^{2-}$  ] イオンが [  $\textcircled{29}$   $\text{Ba}^{2+}, \text{Ti}^{4+}, \text{O}^{2-}$  ] イオンに対し相対的に変位して単位胞として電気双極子モーメントをもつようになる。

問1 文章中の空欄 [  $\textcircled{1}$  ] ~ [  $\textcircled{20}$  ] にあてはまる語句、数式または数値を答えよ。また、空欄 [  $\textcircled{21}$  ] ~ [  $\textcircled{23}$  ] はいずれか適切な化学記号を選択せよ。

問2 気体状態の有機化合物 (A)  $\text{CH}_4$  と (B)  $\text{CH}_3\text{Cl}$  と (C)  $\text{CCl}_4$  に対する  $\kappa-1$  と絶対温度  $T$  の逆数の関係として、適切に表しているグラフをそれぞれ図 4-1 の (あ) ~ (お) の中から選び、その記号で答えよ。またその理由を簡潔に述べよ。ただし、いずれの気体とも  $\kappa-1 \ll 1$  である。

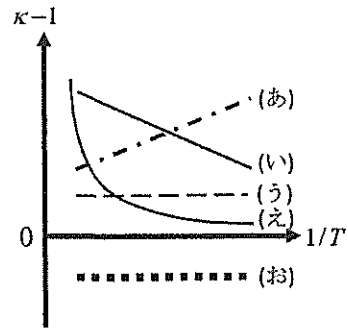


図 4-1

問3 図 4-2(a), 図 4-2(b) を解答用紙に転記し、

[ ⑪ ] 分極, [ ⑬ ] 分極,

[ ⑭ ] 分極を各々 1 つずつもつ物質に

角周波数  $\omega$  の振動電界を印加した場合の全分極率  $\alpha$  の実数部  $\alpha'$  と虚数部  $\alpha''$  の角周波数依存性を示すグラフの概形を図示せよ。ここで、

[ ⑪ ] 分極, [ ⑬ ] 分極,

[ ⑭ ] 分極の十分低い周波数における

各々の分極率の実数部を  $\alpha_1'$ ,  $\alpha_2'$ ,  $\alpha_3'$  とし、文章中の [ 下線 ] で述べたようなそれぞれ

[ ⑪ ] 分極, [ ⑬ ] 分極,

[ ⑭ ] 分極に対応する振動電界の

エネルギーの [ ⑯ ] が最大となる角周波数を  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  とする。

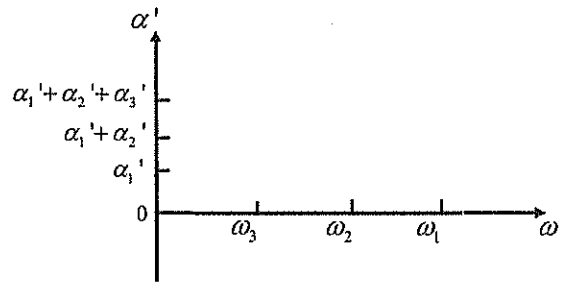


図 4-2(a)

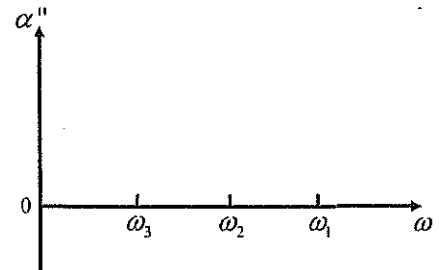


図 4-2(b)

問4 図 4-3 を解答用紙に転記し、 $\text{BaTiO}_3$  の

[ ⑰ ] 温度  $T_1$  より高い温度での

[ ⑱ ] 相における比誘電率  $\kappa$  と絶対温度

$T$  との関係を示すグラフの概形を図示し、 $\kappa$  の温度依存性を簡潔に説明せよ。

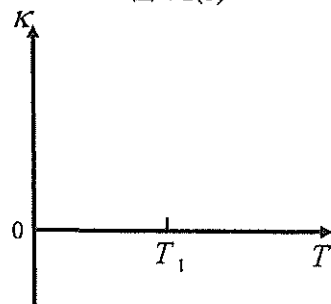


図 4-3

#### 量子電子物性4 単語の英訳

誘電体：	dielectric
誘電率：	permittivity
素電荷：	elementary charge
虚数単位：	imaginary unit
電界：	electric field
分極：	polarization
電気双極子：	electric dipole
電磁気学：	electromagnetism
原子：	atom
分子：	molecule
電気双極子モーメント	electric dipole moment
局所電界：	local electric field
分極率：	polarizability
密度：	density
局所電界係数：	local electric field coefficient
比誘電率：	relative permittivity
振動電界：	oscillating electric field
制動力：	braking force / damping force
振動子：	oscillator
角周波数：	angular frequency
平衡位置：	equilibrium position
位相：	phase
複素分極率：	complex polarizability
実数部：	real part
虚数部：	imaginary part
強誘電体：	ferroelectric
単位胞：	unit cell
絶対温度：	absolute temperature

【信号処理】解答は、だいたい色の解答用紙に記入すること。

入力信号  $x[n]$  を処理し出力信号  $y[n]$  ( $n$  は時刻を表す整数) を生成する離散時間信号処理システム  $L$

$$y[n] = L[x[n]] \quad (1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (i) 離散時間信号処理システムにおける線形性の定義を数式を用いて述べよ。また、線形なシステムとそうでないシステムの具体例を一つずつ挙げ、各々が定義を満たすこと、または満たさないことを示せ。
- (ii) 離散時間信号処理システムにおける時不変性の定義を数式を用いて述べよ。また、時不変なシステムとそうでないシステムの具体例を一つずつ挙げ、各々が定義を満たすこと、または満たさないことを示せ。

以下の問いでは、システム  $L$  が線形かつ時不変であるとして答えよ。

- (iii) システム  $L$  では、そのインパルス応答  $h[n]$  と入力信号  $x[n]$  の畳込みにより出力信号  $y[n]$  が与えられること、すなわち

$$y[n] = h[n] * x[n] \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k]$$

となること ( $*$  は畳込み演算記号) を、式 (1) より導出せよ。

- (iv) システム  $L$  のインパルス応答、周波数応答、伝達関数について、各々の定義や性質を数式を交えて説明せよ。また、これらの相互関係を詳しく説明せよ。

専門用語の英訳	
入力信号	input signal
出力信号	output signal
離散時間信号処理システム	discrete-time signal processing system
線形	linear
時不変	time-invariant
インパルス応答	impulse response
畳込み	convolution
周波数応答	frequency response
伝達関数	transfer function