

平成 31 年度大学院博士前期課程入学試験

大阪大学大学院工学研究科 電気電子情報工学専攻

基礎科目試験問題

(実施時間 9:30 ~ 12:30)

【注 意 事 項】

1. 問題用紙は、この表紙や白紙を除いて12ページある。解答開始の指示があるまで開いてはいけない。解答開始後、落丁や不鮮明な箇所等があった場合は、手を挙げて監督者にその旨を伝えること。
2. 試験問題は、「数学1」、「数学2」、「数学3」、「数学4」、「数学5」、「電磁理論1」、「電磁理論2」、「電気電子回路1」、及び、「電気電子回路2」の9題*あり、この順番に綴じられている。このうち、5題を選択し解答すること。但し、選択すべき試験問題は、受験コース毎に下表のように規定されている。
- 3.

受験コース名	選択すべき試験問題
電気工学コース	「数学1」、「数学2」、「数学3」、「数学4」、「数学5」の5題から3題、及び、「電磁理論1」、「電磁理論2」、「電気電子回路1」、「電気電子回路2」の4題から2題、合計5題を選択すること
電子工学コース	
情報通信工学コース	9題(上記*印)から5題選択すること

4. 解答開始前に、別紙の「基礎科目試験問題選択票」に記載の注意事項も読んでおくこと。
5. 問題用紙は持ち帰ってもよい。

【数学1】解答は、白色（1番）の解答用紙に記入すること。

以下の設問 (a)~(d) に答えよ。

- (a) 実対称行列 (real symmetric matrix) $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ を対角化し (diagonalize), すべての固

有値 (eigenvalue) と対応する固有ベクトル (eigenvector) を求めよ。

- (b) 実対称行列 $B \in \mathcal{R}^{n \times n}$ が, 直交行列 (orthogonal matrix) T により対角化可能 (diagonalizable) で,

対角行列 (diagonal matrix) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ を用いて,

$$T^t B T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表せるとする。ここで, T^t は T の転置行列 (transposed matrix) を表す。このとき, $x \in \mathcal{R}$ に関する多項式 (polynomial expression) $f(x) = \sum_{i=1}^k c_i x^i$, および行列 $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$ に関する多項式 $f(X) = \sum_{i=1}^k c_i X^i$ に対し,

$$f(B) = T \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{pmatrix} T^t$$

が成り立つことを示せ。ただし, k は自然数 (natural number), c_1, c_2, \dots, c_k は実定数 (real constant) を表す。

- (c) 実対称行列 $C \in \mathcal{R}^{n \times n}$ が直交行列 S により $S^t C S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$ と対角化可能であり, かつ,

$\sigma_i \geq -\frac{1}{4}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) であれば, $X^2 - X = C$ を満たす $X = S \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} S^t$ が存在する

ことを, 設問 (b) の結果を用いて示せ。ただし, d_1, d_2, \dots, d_n はすべて正の実数 (positive real number) を表す。

- (d) 設問 (a) で与えた実対称行列 A に対して $X^2 - X = A$ を満たし, かつ, 固有値がすべて正の実数である行列 X を, 設問 (a)~(c) の結果を用いて一つ求めよ。

【数学2】解答は、赤色（2番）の解答用紙に記入すること。

下記の式 (1) に示す多項式関数 (polynomial function) $y(x)$ ($x > 0$) が、式 (2) に示す 2 階微分方程式 (second-order differential equation) を満たす場合について考える。

$$y(x) = c_0x^\nu + c_1x^{\nu+1} + c_2x^{\nu+2} + \dots + c_kx^{\nu+k} + \dots = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k \quad (1)$$

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2}y(x) + x \frac{d}{dx}y(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \quad (2)$$

ここで、 c_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) は定数 (constant), ν は非負の整数 (non-negative integer) とする。以下の設問 (a)~(d) に答えよ。

(a) $\nu = 0$ のとき、 $\frac{d}{dx}y(x)$ ならびに $\frac{d^2}{dx^2}y(x)$ を、 c_k を用いた級数 (series) の形で示せ。

(b) 設問 (a) の結果を利用して、 $\nu = 0$ のときの c_{k-2} と c_k の関係を示せ。

(c) $\nu = 0$, $c_0 = 1$ のときの $y(x)$ を、級数の形で示せ。

(d) $\nu \neq 0$ のときの $y(x)$ を、ガンマ関数 (gamma function) Γ を用いた級数の形で示せ。ここで、

$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ で与えられるとする。また、ガンマ関数は、 $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ ($\text{Re}(z) > 0$) で定義され、 $\Gamma(\nu) = (\nu-1)\Gamma(\nu-1)$ の関係を満たす。

【数学3】 解答は、青色（3番）の解答用紙に記入すること。

複素関数 (complex function) $f(z)$ を考える。いま、複素数 (complex number) z を実数 (real number) x および y を用いて $z = x + iy$ と表した場合、 f は実数値関数 (real-valued function) $g(x, y)$ と $h(x, y)$ を用いて $f(z) = g(x, y) + ih(x, y)$ と表される。以下の設問 (a)~(d) に答えよ。

- (a) 複素関数 f が $f(z) = e^{az+b\bar{z}}$ で与えられるとする。ここで、 \bar{z} は z の複素共役 (complex conjugate) である。このとき、関数 g および h を x と y の関数として表せ。
- (b) 設問 (a) と同様の関数 $f(z) = e^{az+b\bar{z}}$ を考える。コーシー・リーマンの関係式 (Cauchy-Riemann equations) を用いて、 $f(z)$ が全ての複素数 z において解析関数 (analytic function) であるための必要十分条件 (necessary and sufficient condition) が $b = 0$ であることを示せ。
- (c) 複素関数 f が

$$f(z) = \frac{e^z}{z-1}$$

で与えられるとする。いま、 $z = \beta$ ($\beta \neq 1$) を中心とした $f(z)$ のべき級数展開 (power series expansion) の展開係数 (expansion coefficient) を $\{\gamma_n\}$ と表すと、任意の自然数 (natural number) n に対して、ある実数 $\alpha_{k,n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) が存在して、 γ_n は次式の形で与えられることを数学的帰納法 (mathematical induction) を用いて示せ。

$$\gamma_n = \frac{e^\beta}{n!} \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} (-1)^k \frac{1}{(\beta-1)^{k+1}}$$

また、 $\alpha_{k,n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) を $\alpha_{0,n-1}, \alpha_{1,n-1}, \dots, \alpha_{k,n-1}$ を用いて表せ。ただし、 $n \geq 2$ とする。

- (d) 点 $z = 1$ を内部 (interior) に含まず、 $z = 2$ を内部に含む区分的に滑らかな (piecewise smooth) ジョルダン閉曲線 (Jordan curve) C を考える。このとき、次の積分 (integral) を計算せよ。

$$\oint_C \frac{e^z}{(z-1)(z-2)^4} dz$$

【数学4】 解答は、黄色（4番）の解答用紙に記入すること。

初期条件 (initial condition)

$$f(0) = 1, \quad \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

のもとで、次の微分方程式 (differential equation) を満たす関数 (function) $f(t)$ に関する以下の設問 (a)~(d) に答えよ。

$$t \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{df(t)}{dt} + t f(t) = 0 \quad (1)$$

- (a) 式(1)の両辺をラプラス変換 (Laplace transform) することにより、関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ に関する微分方程式を導け。
- (b) 設問 (a) で得られた $F(s)$ に関する微分方程式を解け。その際、次の関係を用いて積分定数 (constant of integration) を決定せよ。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$$

- (c) 次の定積分 (definite integral) の値を求めよ。

$$\int_0^{\infty} f(t) dt$$

- (d) 関数 $f(t)$ の $t = 0$ における2階微分 (second-order derivative) の値 $\left. \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right|_{t=0}$ を求めよ。

【数学5】 解答は、水色（5番）の解答用紙に記入すること。

X を正 (positive) の値を取る確率変数 (random variable), f を連続な (continuous) 増加関数 (increasing function), g を減少関数 (decreasing function) とする. 以下の設問 (a)~(d) に答えよ.

(a) 任意の正の実数 (real number) a に対して

$$E[\{f(X) - f(a)\}\{g(X) - g(a)\}] \leq 0$$

が成立することを示せ. ただし, 任意の確率変数 Y に対して $E[Y]$ は Y の期待値 (expectation) を表す.

(b) $E[f(X)]$, $E[g(X)]$, $E[f(X)g(X)]$ は全て有限 (finite) であると仮定する. f が連続かつ $E[f(X)]$ が有限ならば $f(b) = E[f(X)]$ となる正の実数 b が必ず存在することを利用して

$$E[f(X)g(X)] \leq E[f(X)]E[g(X)]$$

が成立することを示せ.

(c) $E[X^{-1}]$ が有限であるとき, $E[X^p]$ が有限であるような任意の正の実数 p に対して

$$E[X^{-1}] \geq \frac{E[X^{p-1}]}{E[X^p]}$$

が成立することを示せ.

(d) 任意の自然数 (natural number) n に対して

$$E[X^{-n}] \geq \frac{1}{(E[X])^n}$$

が成立することを示せ. ただし, $E[X] = \infty$ の場合は $1/(E[X])^n = 0$ と解釈する.

【電磁理論1】 解答は、桃色(6番)の解答用紙に記入すること。

解答用紙に①～⑫の番号を記し、対応する以下の文中の空欄に当てはまる数式や数値を解答用紙に記入せよ。

真空中の導体に関する電界，電位(静電ポテンシャル)，静電容量等について下記の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率は ϵ_0 とし，無限遠での電位を0とする。

[1] 図1に示すように，球座標系 (r, θ, ϕ) の原点Oに中心がある半径 a の孤立した導体球Aがある。この導体球Aは電荷 Q ($Q > 0$)を持つ。この電荷が作り出す電位 $\phi_1(r)$ ($r > a$)および導体球の静電容量 C_1 を求めよ。

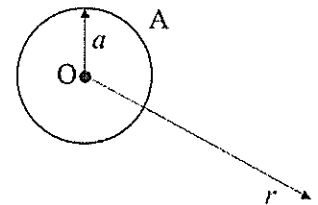


図1

$$\phi_1(r) = \boxed{\text{①}} \quad (r > a)$$

$$C_1 = \boxed{\text{②}}$$

この導体をもつ静電エネルギー W_1 は，上の結果を用いて

$$W_1 = \boxed{\text{③}}$$

と表される。

[2] 次に図2に示すように，導体球Aが内径を b ($b > a$)，外径を c ($c > b$)とする同心球殻導体Bで囲まれている系を考える。これらの導体の間および外側は真空とする。導体Aに Q_1 ($Q_1 > 0$)，導体Bに Q_2 ($Q_2 > 0$)の電荷を与えるとき，各領域での r における電界 $E(r)$ および電位 $\phi(r)$ を求めよ。また，この2つの導体間における静電容量 C' を求めよ。 r 方向の基本ベクトルを i_r とする。

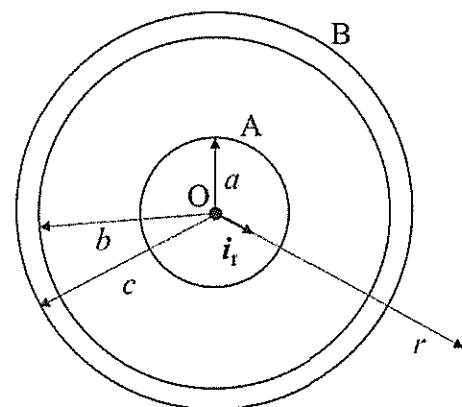


図2

$$E(r) = \boxed{\text{④}} \quad (0 < r < a)$$

$$E(r) = \boxed{\text{⑤}} \quad (a < r < b)$$

$$E(r) = \boxed{\text{⑥}} \quad (b < r < c)$$

$$E(r) = \boxed{\text{⑦}} \quad (c < r)$$

$$\phi(r) = \boxed{\text{⑧}} \quad (0 < r < a)$$

$$\phi(r) = \boxed{\text{⑨}} \quad (a < r < b)$$

$$\phi(r) = \boxed{\text{⑩}} \quad (b < r < c)$$

$$\phi(r) = \boxed{\text{⑪}} \quad (c < r)$$

$$C' = \boxed{\text{⑫}}$$

[3] 次に図3に示すように、十分遠方にある電荷を持たない導体Dに導体Aを導線でつなげると、導体Aの電荷の一部 Q_D が導体Dに移動し定常状態となった。なお、導線は導体Bに開けた穴を通り、導体Bには接触していないものとする。このときの各導体表面(導体A、導体Bの内面、導体Bの外表面)に誘起される電荷は、それぞれ

導体Aの電荷:

導体Bの内面の電荷:

導体Bの外表面の電荷:

となる。ただし、導体Bの穴は十分に小さく、また導線は十分に細く、これらは誘起される電荷に影響しないものとする。

全系の静電エネルギー W' は、導体AB間の静電容量を C_{AB} 、導体B外面の静電容量を C_B 、導体Dの静電容量 C_D を用いて

$W' =$

と表される。

また、定常状態では $dW'/dQ_D = 0$ が成立し、 C_{AB} 、 C_B 、 C_D は Q_D に依存しないことから、移動した電荷 Q_D は

$Q_D =$

と求まる。電界が時間的に変化しない静電界の場合には、静電エネルギーが最小となる電荷分布をとる。この現象はThomsonの定理として知られている。

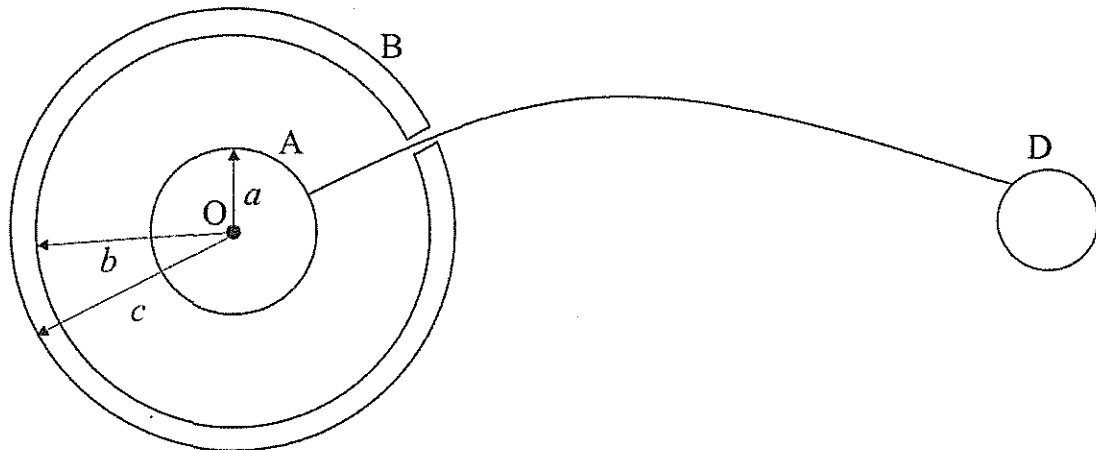


図3

【電磁理論2】 解答は、緑色(7番)の解答用紙に記入すること。

解答用紙に①～⑩の番号を記し、対応する以下の文中の空欄にあてはまる数式や数値、語句を解答用紙に記入せよ。ただし、⑩については適切な語句を選び、その記号を記せ。

真空中に間隔 d の無限に広い導体平行平板 I, II が置かれ、導体平行平板 I の電位は 0, 導体平行平板 II の電位は V ($V > 0$) に保たれている。図 1 のように導体平行平板 II の表面に原点をとる直角座標系を考え、 x 軸正の方向に一樣な磁界を加えた。磁束密度を B (大きさ B (> 0)) としたとき、質量 m , 電荷量 q ($q > 0$) の単一点電荷の運動の様子を考える。ただし、初期条件として点電荷は時刻 $t = 0$ において、導体平行平板 II 上の原点に静止しているものとする。時刻 t における点電荷の速度を $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$ とすると、点電荷の運動方程式は

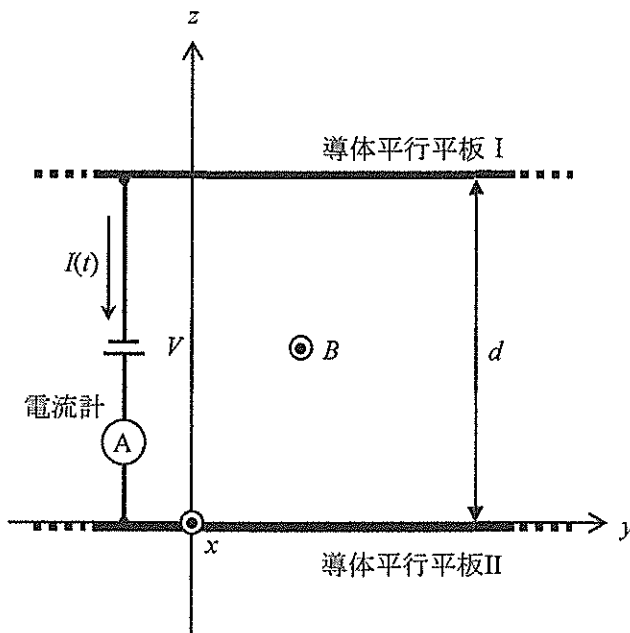


図 1

$$m \frac{dv_x(t)}{dt} = \boxed{\text{①}} \quad (1)$$

$$m \frac{dv_y(t)}{dt} = \boxed{\text{②}} \quad (2)$$

$$m \frac{dv_z(t)}{dt} = \boxed{\text{③}} \quad (3)$$

となり、式(2)および式(3)より $v_z(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{d^2 v_z(t)}{dt^2} = -\omega_c^2 v_z(t) \quad (4)$$

が得られる。ここで ω_c は $\omega_c = \boxed{\text{④}}$ であり、 $\boxed{\text{⑤}}$ 角周波数とよばれる。初期条件から時刻 t における点電荷の速度は

$$v_x(t) = \boxed{\text{⑥}} \quad (5)$$

$$v_y(t) = \boxed{\text{⑦}} \quad (6)$$

$$v_z(t) = \boxed{\text{⑧}} \quad (7)$$

となり、このときの点電荷の運動エネルギー $K(t)$ は

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \boxed{\text{⑨}} \quad (8)$$

と求まる. また, 時刻 t における点電荷の位置 $(x(t), y(t), z(t))$ は

$$x(t) = \boxed{\text{⑩}} \quad (9)$$

$$y(t) = \boxed{\text{⑪}} \quad (10)$$

$$z(t) = \boxed{\text{⑫}} \quad (11)$$

となり, このときの点電荷のポテンシャル・エネルギー $U(t)$ は

$$U(t) = \boxed{\text{⑬}} \quad (12)$$

と求まる. 式(8), (12)より $\boxed{\text{⑭ (イ) 静電界, (ロ) 静磁界}}$ が点電荷に対して仕事をしないことがわかる.

また, 点電荷が導体平行平板 I に到達するための B の条件は

$$B \leq \boxed{\text{⑮}} \quad (13)$$

である. このとき導体平行平板 I, II 間の電界を E とすると, 時刻 t において点電荷が電界から単位時間あたりに得るエネルギー $P(t)$ は

$$P(t) = qE \cdot v(t) = \boxed{\text{⑯}} \quad (14)$$

となる. 図 1 の電流計で観測される時刻 t の誘導電流を $I(t)$ とすると, $P(t)$ は電源が単位時間あたりに供給するエネルギー $VI(t)$ と等しい. したがって, 点電荷が導体平行平板 I に到達するまでの時刻 t における誘導電流 $I(t)$ は

$$I(t) = \boxed{\text{⑰}} \quad (15)$$

となる.

一方, 点電荷が導体平行平板 I に到達しない $B > \boxed{\text{⑮}}$ の条件では, 点電荷の運動の軌跡は式(9)-(11)で表されるサイクロイドとなり, その時間周期 T は ω_c を用いて $T = \boxed{\text{⑱}}$ と表される. したがって 1 周期あたりに y 方向へ進む距離から, 平均速度の大きさ \tilde{v} が

$$\tilde{v} = \boxed{\text{⑲}} \quad (16)$$

と求まる.

専門用語の英訳

【電磁理論 1】

真空	vacuum
導体	conductor
電界	electric field
電位	electric potential
静電ポテンシャル	electrostatic potential
静電容量	capacitance
誘電率	dielectric constant; permittivity
無限遠	infinite distance
球座標	spherical coordinates
電荷	charge
静電エネルギー	electrostatic energy
同心	concentric
球殻	spherical shell
基本ベクトル	base vector
定常状態	steady state
定理	theorem

【電磁理論 2】

導体平行平板	parallel conductive plates
直角座標系	cartesian coordinate system
磁界	magnetic field
磁束密度	magnetic flux
点電荷	point charge
電荷量	electric charge
速度	velocity
運動方程式	equation of motion
微分方程式	differential equation
初期条件	initial condition
運動エネルギー	kinetic energy
ポテンシャル・エネルギー	potential energy
誘導電流	induced current
サイクロイド	cycloid
軌跡	trajectory

【電気電子回路1】 解答は、灰色(8番)の解答用紙に記入すること。

図1の回路において、時刻 $t=0$ でスイッチ S を閉じるとする。ただし、 $t < 0$ の回路は正弦波定常状態^{*1}にあるとする。また、 $e(t) = 4 \sin 2t$ [V]、 $R = 2$ [Ω]、 $L = 1$ [H]、 $C = 0.125$ [F] とする。以下の問いに答えよ。

- (1) スイッチ S を閉じる前 ($t < 0$) の正弦波定常状態における電圧 $v(t)$ 、電流 $i(t)$ を求めよ。
- (2) 問い(1)の状態において抵抗 R に供給される有効電力^{*2}を求めよ。
- (3) スイッチ S を閉じる直前 ($t = 0^-$) の電圧 $v(t)$ 、電流 $i(t)$ の値を求めよ。
- (4) スイッチ S を閉じた後 ($t > 0$) の電圧 $v(t)$ 、電流 $i(t)$ を求めよ。

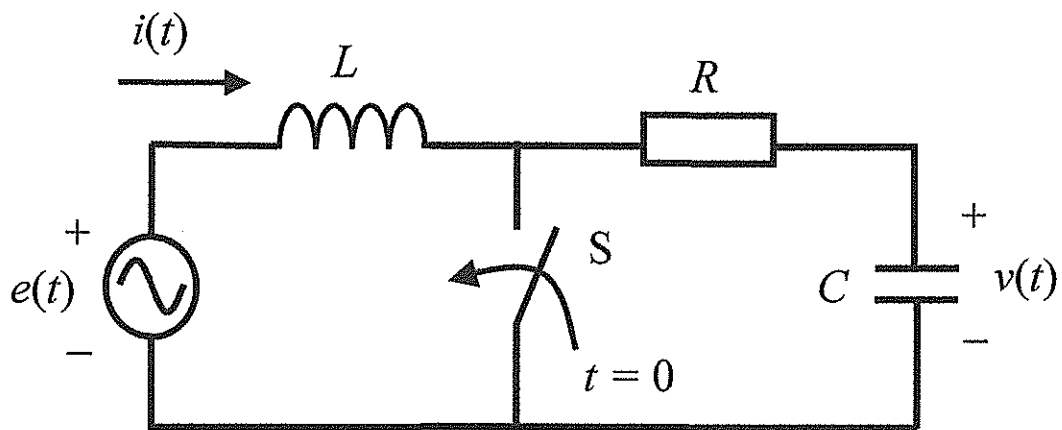


図1

*1 正弦波定常状態: sinusoidal steady state

*2 有効電力: active power

【電気電子回路2】 解答は、だいたい色(9番)の解答用紙に記入すること。

図1は理想演算増幅器^{*1}を用いた回路である。下記の問い(1)~(5)に答えよ。なお、回路内の抵抗器はすべて定数 R [Ω] の抵抗値を持ち、キャパシタはすべて定数 C [F] の静電容量を持つとする。周波数領域^{*2}における2つの入力電圧を $V_1(\omega)$, $V_2(\omega)$ とし、出力電圧を $V_{out}(\omega)$ とする。 $V_1(\omega)$, $V_2(\omega)$ は、互いに位相の異なる振幅 E [V] および角周波数^{*3} ω [rad/s] の正弦波電圧であり、回路はすべて正弦波定常状態^{*4}にあるものとする。また虚数単位^{*5} は j とする。

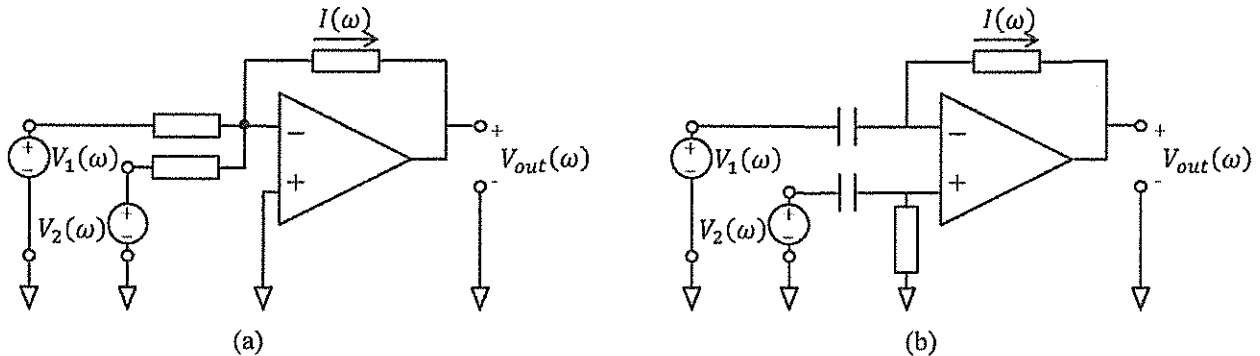


図1

- (1) 図1(a)の回路において、帰還抵抗器^{*6}に流れる電流 $I(\omega)$ を、 R , $V_1(\omega)$ および $V_2(\omega)$ を用いて表せ。
- (2) 図1(a)の回路における $V_{out}(\omega)$ を、 R , $V_1(\omega)$ および $V_2(\omega)$ を用いて表せ。
- (3) 図1(b)の回路において、帰還抵抗器に流れる電流 $I(\omega)$ を、 ω , R , C , $V_1(\omega)$ および $V_2(\omega)$ を用いて表せ。
- (4) 図1(b)の回路における $V_{out}(\omega)$ を、 ω , R , C , $V_1(\omega)$ および $V_2(\omega)$ を用いて表せ。
- (5) 図1(b)の回路において、 $V_1(\omega)$ と $V_2(\omega)$ との位相差が π [rad] であるとき、 $V_{out}(\omega)$ の振幅および、 $V_{out}(\omega)$ の $V_2(\omega)$ に対する位相を求めよ。但し、 $\omega = 2000\pi$ [rad/s], $R = 1000$ [Ω], $C = 10^{-6}/\pi$ [F] とせよ。

图中、右の記号は基準電位^{*7} ↓

*1 理想演算増幅器 : ideal operational amplifier
 *2 周波数領域 : frequency domain
 *3 角周波数 : angular frequency

*4 正弦波定常状態 : sinusoidal steady state
 *5 虚数単位 : imaginary unit
 *6 帰還抵抗器 : feedback resistor
 *7 基準電位 : reference potential